Spec はスキームじゃないよって話

@waheyhey

2020 年 12 月 6 日

スキームの定義くらいは知ってる方向けの記事です．

スキームを導入するメリットは何でしょうか．任意の（単位的可換）環 A に対して位相空間 $\mathrm{Spec}\,A$ を対応させて hogehoge という説明をよく見ます．確かにそう言われると納得しそうになりますが ...... ちょっと待ってください！位相空間 $\mathrm{Spec}\,A$ はスキームではありませんね．何かが足りないはずです．そう，それは構造層 $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,A}$ です．普通は構造層は略記されますが，定義上はセットにして環付き空間 $(\mathrm{Spec}\,A, \mathcal{O})$ で初めてスキームです．

では構造層がある場合とない場合で何が違うのでしょうか．ツイッターで初学者向けに流れてくるスキームの説明を見てるとどうもこの部分が抜けていることが多い気がするので，今日はこの話をすることにします．

まず，アフィンスキームと可換環の圏の反変圏同値が成り立つために構造層が必要なのは明らかです．何故なら，任意の体 k に対して $\mathrm{Spec}\,k$ は一点なので，$\mathrm{Spec}\,k$ だけ見ていては元の体が何か分かりません．もっと言えば，アルティン局所環の Spec も一点なので，困ってしまいますね．

Spec が元の環を覚えておくためには構造層と組みにすることが欠かせないことを復習しました．これで無事，環とアフィンスキームが対応するわけです．では，任意の環を空間と対応させる “旨味” は何でしょうか？整数環 $\mathbb{Z}$ のような数論的な環が空間と対応すること ...... なるほど．数論幾何には詳しくないですが，そうなのでしょう．では僕のような代数幾何ガチガチの人間とっては，“任意の環が空間と対応する” ことの恩恵は無いのでしょうか？ Spec を使わずとも，多項式があればそれの零点集合としてアフィン代数的集合が作れて，ヒルベルトの零点定理のお陰で多項式環の素イデアル $\mathfrak{p}$ とアフィン代数多様体 $V(\mathfrak{p})$ とが一対一に対応しますから，構造層を使わなくても素イデアル $\mathfrak{p}$ の生成元として元の多項式系の情報が復元できるわけです．素イデアルで割った商環が座標環なので，構造層抜きで環が復元出来ることになります．

文字ばっかりで分かりにくいと思うので，少し口説く書いておくと，閉体上で既約アフィン代数的集合（=アフィン代数多様体）と座標環（=閉体上有限型整域）の対応を言うためには，構造層の概念は不要だということです．

つまり構造層がなくてもいいのでは ......？代数幾何をやる上ではスキームにする意味ないのでは？遂に代数幾何学者たちが秘密にしてきた禁断の真実に到達しました！やりましたね！今すぐ手元の分厚いスキーム論の教科書を投げ捨てて，スキームの勉強してた時間にスマブラとかをやって有意義に過ごしましょう！

嘘です．代数幾何でもスキームであって代数多様体でないものは極自然に登場します．そのことを非常に簡単な例を持って説明したいと思います．1 変数多項式環の 2 つのイデアル $(x), (x^2) \subset \mathbb{C}[x]$ を考えます．$x = 0$ も $x^2 = 0$ も解は同じなので，対応するアフィン代数的集合は $V(x) = V(x^2) = \{0\}$ です．このアフィン代数的集合に対応するイデアルは (x) なので，初めにイデアル (x^2) を考えていた場合には情報が失われていることになります．元のイデアルの情報まで込みで覚えておくためには，アフィン代数的集合 $V(x^2)$（一点のみの位相空間）の代わりにアフィンスキーム $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[x]/(x^2)$（構造層は略記）を考える必要があるわけです．

では，代数幾何において $x=0$ と $x^2=0$ を区別したいのはどういうときでしょうか？例えば 2 次方程式 $x^2-a=0$ は $a\neq 0$ の場合は 2 つの解を持ち，$a=0$ の場合のみ重解の 1 点のみとなります（標数は 0 です）．スキームを考えれば，これらを統一的に捉えることができます．まず，2 点上の関数環は $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ なので，2 次元ベクトル空間です．そして，重解というのは $x^2=0$ なので，関数環（＝座標環）は $\mathbb{C}[x]/(x^2)$ で，これもベクトル空間としては 2 次元です．点の個数を関数環のベクトル空間の次元として捉えることにすれば，どっちの場合もちゃんと 2 点あるわけです．重解は重なった解と書きますが，スキーム $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]/(x^2)$ を考えることで重なっている情報をキープできるわけですね．

この様に代数幾何の範疇であっても，被約でないイデアルを考えるときにスキームが登場する必要があります．被約でないイデアルは，上記のように多様体の交叉（連立方程式の解）を考えるときにも出てきます（例えば上の例は既約多項式 $y=x^2$ と $y=a$ の交叉）し，多様体の変形を考える上でも出てきます．$\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]/(x^2)$ は位相空間としては一点ですが，$\operatorname{Spec}\mathbb{C}$ とは違い "太った"構造を持っています．$x^2-a=0$ の解の 2 点が a が 0 に近くにつれて次第に近づいてきて終いには重なるわけですから，微分幾何のときと同じ理屈でスキーム射

$$\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]/(x^2)\to V(y-x^2)=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x,y]/(y-x^2),\{*\}\mapsto(0,0)$$

はスカラー倍の差を除いて $y=x^2$ の $(x,y)=(0,0)$ の接ベクトルと対応しています．（この場合接空間が 1 次元なので接空間そのものと言っても問題ないです．）つまり，スキーム $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]/(x^2)$ は位相空間の点に加えて，何か 1 次元分の "動き"を持っているわけです．よって，スキーム $\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]/(x^2)$ は点が 1 次元のパラメータに沿って微小に変形しているものと捉えられるわけです．これをもっと一般にして，多様体 X の無限小変形は平坦射 $\mathcal{X}\to\operatorname{Spec}\mathbb{C}[x]/(x^2)$ であって閉点のファイバーが X と同型になるものとして定義されます．$\mathcal{X}$ は位相空間としては X と同じですが，スキーム構造（＝構造層）が異なります．$\mathcal{X}$ のアフィン開部分スキームは，被約でない環に対応するスキームになっています．

被約でない環を考える必要性，そして被約でない環を捉えるにはスキームの概念が必要になることを紹介しました．残念なことに，代数幾何に絞る場合でもスキーム論から逃げることは出来ないようです．スキームの本は分厚く，尚且つ細部が省略された証明が多いので最初に勉強するときは大変ですが，これぱっかりは仕方ないようです．