

# 幾何学的不変式論 -Mumford's GIT explained-

@waheyhey

2014年5月4日より執筆開始

Mumford 先生の Geometric Invariant Theory (GIT) [GIT] を勉強したときのノートです。僕は頭が悪いので所によっては間違ったことが書いてあるかもしれませんが、どうか悪しからず御了承下さい。また、誤植・数学的な誤りを見つけた場合にはツイッターアカウント@waheyhey までお知らせ願えると大変ありがたいです。このノートは次の方針に従って作成されています。

- (i) [GIT] は非常に難解であると評判の本であるから、頭が悪く記憶力もない自分の備忘録としてちゃんと役に立つように、少しくどいくらいに説明をつけておく。従って、逆に読みにくくなっている部分があるかもしれないが、気にしないことにする。
- (ii) 注意：この勉強ノートは [GIT] の和訳ではありません。もちろん定理番号等も一切対応していません。
- (iii) 話の腰を折らない程度に、理解の助けになるであろう（より正確にはこのノートの著者が理解する助けになった）例を新たに幾つか加えることにする。
- (iv) [GIT] が EGA や SGA を参照している部分は、できるかぎり Hartshorne の教科書 [Ha77] や、他の英語のテキストで現在容易に入手可能であるだろう本を参照し直すことにする。このノートを書いた人間は浅学であり、無論フランス語などは全くできないからである。
- (v) 他の古い論文を参照している箇所については、できるかぎりその論文を Remarks の章で解説することにした。
- (vi) GIT で定義された用語は基本的にそのまま英語で用いることにした。また、pre-scheme をスキーム、scheme を分離的なスキームと現代的な呼び方に直している。

謝辞。PDF の 1.1 節, 1.2 節を丁寧に読んで、誤植・数学的な誤りや議論が不十分な箇所をご指摘くださった p 進大好き bot 氏に深く感謝いたします。

## 目次

1	Preliminaries (Chapter 0 of GIT)	3
1.1	Definitions . . . . .	3
1.2	First Properties . . . . .	8
1.3	Good and Bad Actions . . . . .	19
1.4	Further Properties . . . . .	22
1.5	Resumé of some results of Grothendieck . . . . .	26
2	Fundamental theorems for the actions of reductive groups (Chapter 1 of GIT)	27
2.1	Definitions . . . . .	27
2.2	The affine case . . . . .	32
2.3	Linearization of an invertible sheaf . . . . .	36
2.4	The general case . . . . .	42
2.5	Functorial properties . . . . .	50
3	Appendix to Chapter 1 of GIT	51
3.1	Geometric reductivity . . . . .	51
3.2	Stability . . . . .	51
3.3	Extension of the results in the text to characteristic $p$ . . . . .	51
3.4	Luna's result on the orbit structure for the action of a reductive group . . . . .	51
3.5	The Hochster-Roberts theorem and its extensions . . . . .	51
3.6	A criterion for generic stability . . . . .	51
3.7	Geometric stability over more general rings . . . . .	51
4	Analysis of stability (Chapter 2 of GIT)	52
4.1	A numerical criterion . . . . .	52
4.2	The flag complex . . . . .	56
4.3	Applications . . . . .	57
5	The problem of moduli - 1st construction (Chapter 5 of GIT)	58
5.1	General discussion . . . . .	58
5.2	Moduli as an orbit space . . . . .	58
5.3	First chern classes . . . . .	59
5.4	Utilization of §4.6 of GIT . . . . .	59
6	Further examples (Chapter 4 of GIT)	60
6.1	Space curves . . . . .	60
7	Remarks	61