1 Preliminaries (Chapter 0 of GIT)

1.1 Definitions

S をスキームとする．

定義 1.1（群スキーム） S スキーム $\pi : G \to S$ が群スキーム **(group scheme)** であるとは，3 つの射 $\mu : G \times_S G \to G$，$e : S \to G$，$\beta : G \to G$ が定まり，以下の 3 条件を満たすことである．

(i) 次の図式

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \times_S G \arrow[r, "(\mathrm{id},\mu)"] \arrow[d, "(\mu,\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G \times_S G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times_S G \arrow[r, "\mu"] & G \end{tikzcd}$$

が可換になる．

(ii) 合成

$$\begin{tikzcd} & G \times_S S \arrow[dr, "1_G \times e"] & & \\ G \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & G \times_S G \arrow[r, "\mu"] & G \\ & S \times_S G \arrow[ur, "e \times 1_G"'] & & \end{tikzcd}$$

は恒等射 $1_G : G \to G$ に等しい．

(iii) 合成

$$G \xrightarrow{\Delta} G \times_S G \underset{\beta \times 1_G}{\overset{1_G \times \beta}{\rightrightarrows}} G \times_S G \xrightarrow{\mu} G$$

は，合成 $e \circ \pi : G \to G$ に等しい． □

注意 1.2 すなわち，S 上の群スキームとは，S スキームのカルテジアンモノイダル圏における群対象のことである． □

注意 1.3 S 上の群スキーム G と，S スキーム T に対して，G の T 値点全体のなす集合 $G(T) := \mathrm{Hom}_S(T, G)$ は群になることが定義から直ちにわかる． □

例 1.4（一般線型群スキーム） $\mathbb{Z}$ 上のアフィンスキーム $\mathrm{GL}_n := \mathrm{Spec}\, A$，$A := \mathbb{Z}[(T_{ij})_{1 \le i,j \le n}][\det^{-1}]$ を考える．ここで，$\det \in \mathbb{Z}[(T_{ij})]$ は行列 $(T_{ij})_{i,j}$ の行列式として現れる整係数の多項式である．任意のスキーム T に対して，

$$\mathrm{GL}_n(T) := \mathrm{Hom}(T, \mathrm{GL}_n) \simeq \mathrm{Hom}(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T))$$

であり，同型 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[(T_{ij})], \Gamma(T, \mathcal{O}_T)) \simeq \Gamma(T, \mathcal{O}_T)^{\oplus n^2}$ 及び，環準同型 $f : \mathbb{Z}[(T_{ij})] \to \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ が $A = \mathbb{Z}[(T_{ij})][\det^{-1}]$ を経由するための条件が局所化の普遍性により与えられていることを考えると，結果として同型

$$\mathrm{Hom}(T, \mathrm{GL}_n) \simeq \mathrm{GL}_n(\Gamma(T, \mathcal{O}_n))$$

を得る[*1]．ここで，$\mathrm{GL}_n(\Gamma(T,\mathcal{O}_T))$ は環 $\Gamma(T,\mathcal{O}_T)$ を係数にもつ可逆な行列のなす群である．GL_n は $\mathbb{Z}$ 上の群スキームである．また，スキーム S で基底変換することで，S 上の群スキーム $\mathrm{GL}_{n,S} := \mathrm{GL}_n \times_{\mathbb{Z}} S$ を得る．このスキーム $\mathrm{GL}_{n,S}$ を S 上の**一般線型群スキーム (general linear group scheme)** という．体 k 上の一般線型群は $\mathrm{GL}(n,k) := \mathrm{GL}_{n,\mathrm{Spec}\,k}$ と表す． □

例 1.5（乗法群スキーム） 体 k 上の一般線型群スキーム $\mathrm{GL}(n,k)$ の $n = 1$ の場合を特に $\mathbb{G}_m := \mathrm{Spec}\,k[t,t^{-1}]$ と表し，体 k の**乗法群スキーム (multiplicative group scheme)** という． □

定義 1.6（代数群） 体 k 上の群スキーム G/k は，k 上滑らかな代数的スキーム[*2]であるとき，k 上の**代数群**であるという． □

以下では G は特に断りがない限り S 上の群スキームを表し，ファイバー積は特に言及が無い場合は S 上でとることにする．

定義 1.7（群スキームの作用） S スキーム X/S に対し，S 射 $\sigma : G \times X \to X$ が定まり次の条件を満たすとき，G は X に**作用する**という．

(i) 次の図式

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "1_G \times \sigma"] \arrow[d, "\mu \times 1_X"'] & G \times X \arrow[d, "\sigma"] \\ G \times X \arrow[r, "\sigma"] & X \end{tikzcd}$$

が可換になる．

(ii) 合成

$$X \simeq S \times X \xrightarrow{e \times 1_X} G \times X \xrightarrow{\sigma} X$$

は恒等射 $1_X : X \to X$ に等しい． □

注意 1.8 S 上の群スキーム G と，S スキーム X, T，G の X への作用 $\sigma : G \curvearrowright X$ に対して，G の T 値点全体のなす群 $G(T)$ は X の T 値点のなす集合 $X(T)$ に作用する． □

定義 1.9（軌道，stabilizer） X の T 値点 $f : T \longrightarrow X$ をとる．ファイバー積の普遍性

$$\begin{tikzcd} G \times_S T \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "1_G \times f"'] \arrow[dr, dotted, "\Psi_f^G"] & T \arrow[dr, equal] & \\ G \times_S X \arrow[dr, "\sigma"'] & X \times_S T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & T \arrow[d] \\ & X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

を用いて $\Psi_f^G : G \times_S T \to X \times_S T$ を定める．混同の恐れがない場合は単に Ψ_f と略記することもある．Ψ_f の像を $O(f)$ で表し，f の**軌道 (orbit)** という．また，次の図式を用いて $S(f) := (G \times_S T) \times_{X \times_S T} T$ と定

[*1] すなわち，スキーム GL_n は関手 $T \mapsto \mathrm{GL}_n(\Gamma(T,\mathcal{O}_T))$ を表現する．

[*2] Hartshorne の教科書 [Ha77] では**代数的スキーム (algebraic scheme)** という言葉は使われていないが，基礎体上有限型スキームのことである．このノートでは単に代数的スキームという場合には，分離性は仮定しない．

め，f の **stabilizer** という．

$$\begin{tikzcd} S(f) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G \times_S T \arrow[d, "\Psi_f^G"] \\ T \arrow[r, "f\times 1"'] & X \times_S T \end{tikzcd}$$

$f : T = \operatorname{Spec} k \xrightarrow{x} X$ のときは，$O(x)$ や $S(x)$ とも表す．k が代数閉体である場合には，$O(x)$ は $X \to S$ の幾何学的ファイバー $\overline{X} = X \times_S \operatorname{Spec} k$ の部分集合，$S(x)$ は $G \to S$ の幾何学的ファイバー $\overline{G} = G \times_S \operatorname{Spec} k$ の部分群スキームである． □

この定義の意味は，G を代数群，X を代数多様体として，特に幾何的点で考えてみるとよく分かるだろう．

補題 1.10　$S(f)$ は $G \times_S T$ の T 上の部分群スキームになる． □

定義 1.11（categorical quotient）　S 射 $\phi : X \to Y$ で，以下の条件を満たすものを**圏論的商 (categorical quotient)** という：

(i)　次の図式

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

が可換になる．

(ii)　$\phi : X \to Y$ は次の普遍性を満たす：(i) を満たすような $\psi : X \to Z$ に対して次の図式を可換にする S 射 $Y \to Z$ が一意に存在する．

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \\ Y \arrow[rr, dotted, "\exists !"] & & Z \end{tikzcd}$$

□

注意 1.12　categorical quotient の定義の (ii) を categorical quotient の普遍性（または普遍写像性質）という．この普遍性から，categorical quotient は存在すれば商の写像 ϕ まで含めて一意な同型を除いて一意的である． □

定義 1.13（geometric quotient）　S 射 $\phi : X \to Y$ で，以下の条件を満たすものを**幾何学的商 (geometric quotient)** という：

(i)　次の図式

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & X \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, "\phi"] & Y \end{tikzcd}$$

が可換になる．

(ii) ϕ は全射である．また，(i) の条件より $\Psi_{\mathrm{id}} : G \times_S X \to X \times_S X$ は $G \times_S X \to X \times_Y X$ と普遍性から定まる埋め込み $X \times_Y X \to X \times_S X$ を経由するが，前者の射

$$G \times_S X \to X \times_Y X$$

は全射になる．

(iii) Y の位相は φ による商位相と一致する（ϕ が **submersive** であるという）．すなわち，「$U \subset Y$ が開集合 $\Leftrightarrow$ $\phi^{-1}(U) \subset X$ が開集合」となる．

(iv) ϕ が全射なので，$\mathcal{O}_Y$ は $\phi_*\mathcal{O}_X$ の部分層になる．このとき，各 $U \subset Y$ と任意の $f \in \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ に対し，$f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ となるための必要十分条件は，次の図式

$$\begin{tikzcd} G \times_S \phi^{-1}(U) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \phi^{-1}(U) \arrow[d, "f"] \\ \varphi^{-1}(U) \arrow[r, "f"] & \mathbb{A}^1_S \end{tikzcd}$$

が可換になることである．ここで上の図式における $f : \phi^{-1}(U) \to \mathbb{A}^1_S$ は，同型 $\mathrm{Hom}_S(\phi^{-1}(U), \mathbb{A}^1_S) \simeq \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ によって f と対応する射を表す． □

注意 1.14 geometric quotient の定義の (ii) を理解するために，少々の解説を試みる．簡単のため，$S = \mathrm{Spec}\, k$ であるとし，基礎体 k は代数的閉体，G, X, Y は代数多様体であるとする．全射

$$\Psi = (\sigma, p_2) : G \times X \twoheadrightarrow X \times_Y X \subset X \times X$$

が存在するということは，任意の閉点 $x_1, x_2 \in X$ で $\phi(x_1) = \phi(x_2)$ となるものに対して，ある $g \in G$ が存在して $\Psi(g, x_2) = (x_1, x_2)$ となるということである．ところが，Ψ の定義から $\Psi(g, x_2) = (gx_2, x_2)$ であるので，$gx_2 = x_1$ となる．すなわち，ϕ で同じ点に移る X の点 x_1, x_2 は G の作用で互いに移り合う．これは，ϕ のファイバーがひとつの G 軌道になっているという意味であるから，geometric quotient Y は軌道のパラメータ空間と呼ぶにふさわしいスキームであることが分かる．

実は，この条件 (ii) が categorical quotient と geometric quotient の本質的な差になっている． □

定義 1.15（universal and uniform quotient） G の X への作用 σ に対して，categorical quotient（または geometric quotient）(Y, ϕ) が **universal** であるとは，任意の射 $Y' \to Y$ に対して，$X' := X \times_Y Y'$ とおくと，(Y', p_2) は X' の G 作用による categorical quotient（または geometric quotient）となることである．

以上が平坦射 $Y' \to Y$ についてのみ成り立つとき，(Y, ϕ) は **uniform categorical quotient**（または **uniform geometric quotient**）であるという． □

■表現可能関手と quotient に関する注意

定義 1.16（（余）表現可能関手） $\mathcal{C}$ をファイバー積を持つ圏，$\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Sets})$ を反変関手とする．また，対象 $x \in \mathcal{C}$ に対して米田関手を $\underline{x} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, x)$ と表す．このとき，

(i) 対象 $x \in \mathcal{C}$ が関手 $\mathcal{F}$ を **represent** するとは，関手の同型 $\mathcal{F} \simeq \underline{x}$ が成り立つことである．

(ii) 対象 $x \in \mathcal{C}$ が関手 $\mathcal{F}$ を **corepserent** するとは，ある関手の射 $\alpha : \mathcal{F} \to \underline{x}$ が存在して，任意の $x' \in \mathcal{C}$ と $\alpha' : \mathcal{F} \to \underline{x'}$ に対して，ある $\beta : \underline{x} \to \underline{x'}$ で $\alpha' = \beta \circ \alpha$ が一意的に存在する．

(iii) 対象 $x \in \mathcal{C}$ が $\mathcal{F}$ を **universally corepresent** するとは．ある射 $\alpha : \mathcal{F} \to \underline{x}$ が存在して，任意の $t \in \mathcal{C}$ と射 $\phi : \underline{t} \to \underline{x}$ に対して，$\mathcal{T} := \underline{t} \times_{\underline{x}} \mathcal{F}$ が t で corepresent されることである． $\square$

注意 1.17 S スキーム G が S スキーム X に作用するとき，関手 $\underline{X}/\underline{G} : (\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Sets})$ を，$T \mapsto X(T)/G(T)$ で定める．

(Y, φ) が G の X による (universal) categorical quotient であるとは，Y が $\underline{X}/\underline{G}$ を (universally) corepresent するということに他ならない． $\square$