1.2 First Properties

命題 1.18 geometric quotient は categorical quotient になる．よって，geometric quotient も存在すれば一意な同型を除いて一意的である． □

証明 $\phi : X \to Y$ を geometric quotient とする．ϕ が categorical quotient の定義の (ii) を満たすことを確かめればよい．$\psi : X \to Z$ を categorical quotient の定義の (i) を満たすような S 射とする．まず，図式を可換にするような $Y \to Z$ を構成する．$Z = \bigcup V_i$ を Z のアフィン開被覆とする．

このとき，各 i について $\phi^{-1}(U_i) = \psi^{-1}(V_i)$ となるような Y の開集合 $U_i \subset Y$ が存在する．以下でこのことを確かめよう．まず，$\phi(x) = \phi(y)$ であるような 2 点 $x, y \in X$ をとる．このとき，ある $w \in X \times_Y X$ が存在して $p_1(w) = x$ かつ $p_2(w) = y$ となる（p_i は第 i 成分への射影）．geometric quotient の条件 (ii) より各 i について自然な射

$$\sigma \times p_2 : G \times X \to X \times_Y X$$

は全射であるから，$z \in G \times X$ が存在して $(\sigma \times p_2)(z) = w$ となる．取り方からこの $z \in G \times X$ は $\sigma(z) = x$ かつ $p_2(z) = y$ を満たす．このとき， categorical quotient Z の条件 (i) より，$\psi(x) = \psi(y)$ も成り立つ．

Y の部分集合を $U_i := \phi(\psi^{-1}(V_i))$ と定める．作り方から，$\phi^{-1}(U_i) \supset \psi^{-1}(V_i)$ である[*3]．$x \in \phi^{-1}(U_i)$ を取ると，定義よりある $y \in \psi^{-1}(V_i)$ が存在して，$\phi(x) = \phi(y)$ となる．よって，先ほどの議論により $\psi(x) = \psi(y)$ も成り立つので $x \in \psi^{-1}(V_i)$ が分かり，このことから逆の包含 $\phi^{-1}(U_i) \subset \psi^{-1}(V_i)$ が分かる．したがって，$\phi^{-1}(U_i) = \psi^{-1}(V_i)$ となる．$\phi^{-1}(U_i)$ は X の開集合で ϕ は submersive なので，U_i は開集合である．

以上の議論によって X の開被覆 $X = \bigcup \phi^{-1}(U_i)$ が得られる．層の射 $\mathcal{O}_Z \to \psi_*\mathcal{O}_X$ が誘導する環準同型

$$\psi^* : \Gamma(V_i, \mathcal{O}_Z) \to \Gamma(V_i, \psi_*\mathcal{O}_X) = \Gamma(\psi^{-1}(V_i), \mathcal{O}_X) = \Gamma(\phi^{-1}(U_i), \mathcal{O}_X)$$

を考える．ここで，$\Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y) \subset \Gamma(\phi^{-1}(U_i), \mathcal{O}_X)$ は，geometric quotient の定義から $\psi^{-1}(U_i)$ 上の G 不変な切断のなす部分環である．$g \in \Gamma(V_i, \mathcal{O}_Z)$ に対し，$g' := \psi^*(g) \in \Gamma(\psi^{-1}(V_i), \mathcal{O}_X)$ を考える．構成から，図式

$$\begin{tikzcd}
\psi^{-1}(V_i) \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "g'"'] & V_i \arrow[d, "g"] \\
& \mathbb{A}^1_S
\end{tikzcd}$$

は可換である．一方で，Z が categorical quotient の定義の (i) を満たしていることから，図式

$$\begin{tikzcd}
G \times \psi^{-1}(V_i) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"] & \psi^{-1}(V_i) \arrow[d, "\psi"] \\
\psi^{-1}(V_i) \arrow[r, "\psi"'] & V_i
\end{tikzcd}$$

[*3] 単に集合としての引き戻しを考えている．

も可換である．以上から図式

$$\begin{tikzcd} G \times \psi^{-1}(V_i) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"] & \psi^{-1}(V_i) \arrow[d, "g'"] \\ \psi^{-1}(V_i) \arrow[r, "g'"'] & \mathbb{A}^1_S \end{tikzcd}$$

が可換であるから，$g' \in \Gamma(\psi^{-1}(V_i), \mathcal{O}_X) = \Gamma(\phi^{-1}(U_i), \mathcal{O}_X)$ は G 不変な切断である．従って，$g' = \psi^*(g) \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y)$ であるから，写像

$$\psi^* : \Gamma(V_i, \mathcal{O}_Z) \to \Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y)$$

が定まる．同型

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(\Gamma(V_i, \mathcal{O}_Z), \Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y)) &\simeq \mathrm{Hom}_S(U_i, \operatorname{Spec}\Gamma(V_i, \mathcal{O}_Z)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_S(U_i, V_i) \end{aligned}$$

によって ψ^* に対応する射 $\chi_i : U_i \to V_i$ をとる．構成から，可換性

$$\begin{tikzcd} \phi^{-1}(U_i) = \psi^{-1}(V_i) \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ U_i \arrow[r, "\chi_i"'] & V_i \end{tikzcd}$$

は明らかである．χ_i たちをすべての i について gluing lemma で貼り合わせることによって，S 射 $\chi : Y \to Z$ が得られる．

次に一意性を確かめる．$\chi, \chi' : Y \to Z$ をふたつの S 射で $\chi \circ \phi = \psi = \chi' \circ \phi$ が成り立つようなものとする．ϕ は全射なので各 y について $x \in X$ で $\phi(x) = y$ となるようなものをとると，$\chi(y) = \chi(\phi(x)) = \psi(x) = \chi'(\phi(x)) = \chi'(y)$ となり，χ と χ' は底集合の写像としては一致する．このとき，制限して得られる写像 $\chi, \chi' : U_i \to V_i$ は両方とも環準同型 $\psi^* : \Gamma(V_i, \mathcal{O}_Z) \to \Gamma(U_i, \mathcal{O}_Y)$ に一致するから，スキームの射としても等しい．以上で $\phi : X \to Y$ が categorical quotient であることが証明できた． ■

注意 1.19　この命題と定義から，universal geometric quotient は universal categorical quotient である．□

補題 1.20　(Y, ϕ) を X の G による categorical quotient とするとき，X が次の性質をもつなら，Y もそうである．

(i) reduced,
(ii) connected,
(iii) irreducible,
(iv) locally integral,
(v) locally integral and normal. □

証明　(i) を示す．X が reduced であるとする．Y に被約構造を入れた部分スキーム $i : Y_{\mathrm{red}} \subset Y$ を考える．X が被約であることから，被約構造の普遍性（[Ha77] Chap.2, Exercise 2.3. (c)）より，射 $\phi_{\mathrm{red}} : X \to Y_{\mathrm{red}}$

で次の図式を可換にするものが一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, dotted, "\exists"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ Y_{\mathrm{red}} \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

また，Y_{red} も categorical quotient の定義の (i) を満たしているので，categorical quotient Y の普遍性から，次の図式を可換にするような $j : Y \to Y_{\mathrm{red}}$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "\phi_{\mathrm{red}}"] & \\ Y \arrow[r, "j"'] & Y_{\mathrm{red}} \end{tikzcd}$$

今，得られた射 $i \circ j : Y \to Y$ は，categorical quotient の普遍性より恒等射である．$Y \xrightarrow{j} Y_{\mathrm{red}} \xrightarrow{i} Y$ が恒等射であることから，i, j は互いに逆射であるから $Y = Y_{\mathrm{red}}$，すなわち Y は被約スキームである．

(ii) を示す．X が連結であると仮定すると，集合としての像 $\phi(X)$ も連結であるから，ある Y の連結成分 $i : Y_0 \subset Y$ に含まれる．Y_0 は明らかに categorical quotient の定義の (i) を満たすから，射 $j : Y \to Y_0$ が存在して次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[d, "\phi"] \arrow[dr, "\phi"] & \\ Y \arrow[r, "j"'] & Y_0 \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

こうして得られた $i \circ j : Y \to Y$ は categorical quotient の普遍性から恒等射である．すなわち，$Y = Y_0$ であり，Y は連結である．

(iii) は正直よく分からない．例えば，X の下部位相空間が Noetherian なら $\phi : X \to Y$ のスキーム論的像を考えることで (i), (ii) と同様に証明ができる．実際，X の下部位相空間が Noether 空間なら任意の開集合が準コンパクトなので，射 $\phi : X \to Y$ は準コンパクト射である．ϕ が準コンパクト射なら，スキーム論的像 $Z \subset Y$ の下部位相空間は $f(X)$ の閉包である．X の既約性から $f(X)$ も既約であり，その閉包である Z も既約である．

(iv) は (i),(ii) と類似の議論で示せる．

(v) を示す．X が locally integral ならば，(iv) から Y も locally integral である．このとき，Y の正規化 $f : \tilde{Y} \to Y$ が存在する（[Ha77] Chap.2, Exercise 3.8. *4）．正規化の普遍性より $\tilde{\phi} : X \to \tilde{Y}$ が存在して，次の図式が可換になる．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\tilde{\phi}"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\ \tilde{Y} \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

$\tilde{\phi} : X \to \tilde{Y}$ が categorical quotient の定義の (i) を満たすことも分かるので，後はこれまでと同じ議論により $Y = \tilde{Y}$，すなわち Y が normal であることが示される． ■

*4 ここではスキームが integral の場合に正規化が可能であることを証明せよという問題が出されているが，これは locally integral の場合でも証明が可能である．

注意 1.21　X がネーター的であったとしても，その categorical quotient Y はネーター的どころか，局所ネーター的にすらならないのではないかと思う[*5]（この問題は，Hilbert の第 14 問題[*6]の類似になっている.）．これに関することでは，以下のことのみわかっている : $S = \operatorname{Spec} k$，$k$ は体，X は k 上の正規かつ分離的な代数的スキーム，(Y, ϕ) が *geometric* quotient のとき，Y も k 上の分離的な代数的スキームとなる．この事実は以下では一切使わないので，証明は省略することにする． □

注意 1.22　(Y, ϕ) を universal categorical quotient であるとする．まず，universal であることから Y の任意の点 $y \in Y$ に対してファイバー $\phi : \phi^{-1}(y) = X \times_Y \operatorname{Spec} k(y) \to \operatorname{Spec} k(y)$ も categorical quotient である．$\phi^{-1}(y)$ が空スキームであるとすると，その categorical quotient も空スキームになり矛盾するので，$\phi^{-1}(y)$ は空スキームでない．すなわち，このときの ϕ は全射である．

また，Y の開集合 $U \subset Y$ に対して，universal であることから，$\phi : \phi^{-1}(U) = X \times_Y U \to U$ も categorical quotient である．$f \in \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ で図式

$$\begin{tikzcd}
G \times \phi^{-1}(U) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"] & \phi^{-1}(U) \arrow[d, "f"] \\
\phi^{-1}(U) \arrow[r, "f"'] & \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}$$

を可換にするものに対して，categorical quotient の普遍性から射 $f : U \to \mathbb{A}^1$ で

$$\begin{tikzcd}
\phi^{-1}(U) \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "f"] & \\
U \arrow[r, "f"'] & \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}$$

を可換にするものが存在するから，$f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ である．逆に，$f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \subset \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
G \times \phi^{-1}(U) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"] & \phi^{-1}(U) \arrow[d, "f"] \\
\phi^{-1}(U) \arrow[r, "f"'] & \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}$$

が可換であることは明らかだから，以上から (Y, ϕ) は geometric quotient の定義の (iv) を満たすことがわかる．

従って，universal categorical quotient が universal geometric quotient であるかどうかを確認するには，geometric quotient の定義の (ii) の後半と，universally submersive であることをチェックすればよい[*7]ことになる． □

[*5] この注意は Mumford の GIT に書いてあることのほぼ丸写しの和訳である．この問題については現在は実際に反証がなされているかもしれない．次に述べる永田先生の例というのが反例になっているのであろうか？あんまりちゃんと考えていないので，後でしっかり調べ直すことにする．

[*6] 多項式環 $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ と，その関数体の部分体 $L \subset \mathbb{C}(X_1, \ldots, X_n)$ に対して，$L \cap \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ は $\mathbb{C}$ 上有限個の元で生成されるか？というのが Hilbert の第 14 問題である．これは，線形代数群 G の作用による不変多項式の環は有限個の元で生成されるか，すなわち不変式論の第一基本定理は正しいか？という不変式論の問題を一般化したものである．ちなみに，この問題は永田雅宣先生によって反例が得られている．

[*7] geometric quotient の定義の (i), (ii) は基底変換で保たれ，(iv) は (Y, ϕ) が universal categorical quotient であることから基底変換で保たれる．(iii) の submersivity のみは基底変換で保たれるか分からないので，universally submersive であることを別途確かめないといけない．

注意 1.23 この注意においてはスキームは Noether 的で，スキームの射は有限型，基底となるスキーム S は連結[*8]で normal であるとする．ここで，G が S 上 universally open と仮定すると非常に都合がよい．Chevalley の判定法（EGA Ch.4, 14.4）によって，この条件および，G が S 上開であること，G の S 上のファイバーとして現れる群スキームが全て同じ次元であることは全て同値である．

この仮定の下で，例えば (Y,ϕ) が X の G 作用による geometric quotient としたとき ϕ もまた universally open であることが次のように従う．まず，ϕ が開であることを示す．$U \subset X$ を開集合とする．$\sigma : G \times_S X \to X$ の分解

$$G \times_S X \xrightarrow{p_1 \times \sigma} G \times_S X \xrightarrow{p_2} X$$

において $p_1 \times \sigma$ は同型で，G が S 上 universally open より p_2 は開写像であるから，σ は開写像である．特に，$U' := \sigma(G \times_S U)$ は開集合である．ここで，U' は X の G 不変な開部分集合であるから，$U' = \phi^{-1}(\phi(U'))$ となる．ϕ は submersive であるから $\phi(U')$ は Y の開集合であり，$\phi \circ \sigma = \phi \circ p_2$ より $\phi(U) = \phi(U')$ であるから，$\phi(U)$ は Y の開集合，すなわち ϕ は開写像である．同様にして ϕ が universally open であることが示される[*9]．

他にも，G が S 上 universally open であるという仮定から，次元に関しての結論を得ることもできる．$\phi : X \to Y$ を支配的 S 射で，

(i) $\phi \circ \sigma = \phi \circ p_2$
(ii) 任意の代数的閉体 k に対し，k 上の ϕ の任意の geometric fiber $X \times_Y \operatorname{Spec} k$ は $\overline{G} := G \times_S \operatorname{Spec} k$ の作用による軌道を高々 1 つ含む[*10]．

ようなものであると仮定する．任意の $x \in X$ に関して，

(a) $\sigma(x) := \{x$ の stabilizer $S(x)$ の次元 $\}$
(b) $\tau(x) := \{x$ における fiber $\phi^{-1}(\phi(x))$ の次元 $\}$

と定める．upper semi-continuity theorem を $S(1_X) \to X$ および ϕ に対し用いることで，σ と τ は上半連続的であることがわかる．実際，図式

$$\begin{tikzcd}
S(x) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & S(1_X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G \times_S X \arrow[d, "(\sigma, 1_X)"] \\
\operatorname{Spec} k(x) \arrow[r, "x"] & X \arrow[r, "\Delta"] & X \times_S X
\end{tikzcd}$$

より，$S(1_X) \to X$ のスキーム論的ファイバーは $S(x)$ であるので，σ は上半連続的である．また，g を G の S 上のファイバーとして現れる群スキームたちの次元とする．閉点 $x \in X$ に対して，その S スキームとしての構造射による像を $s \in S$ とする．X が S 上有限型であることから，剰余体の拡大 $k(s) \subset k(x)$ は有限次拡大であるから，$k(s)$ の代数的閉包 $\Bbbk$ とおくと，これは $k(x)$ の代数的閉包にもなる．対応する射を $\bar{s} : \operatorname{Spec} \Bbbk \to S,\ \bar{x} : \operatorname{Spec} \Bbbk \to X$ とする．全体を $\operatorname{Spec} \Bbbk \xrightarrow{\bar{s}} S$ で基底変換することにより，仮定の (ii) も用い

[*8] この条件は [GIT] では省かれているが，$G \to S$ のファイバーの等次元性を得るために必要である．
[*9] らしいが，よく分からない．ϕ の submersivity が基底変換で保たれるのかが不明なので，同様の議論は適用不可能に見える．
[*10] より正確には、ϕ のファイバーを考える $y : \operatorname{Spec} k \to Y$ を最初に取って，$Y \to S$ と合成させて $s : \operatorname{Spec} k \to S$ にした後に s での G, X, Y, ϕ のファイバー G', X', Y', ϕ' を考えて，ϕ の y でのファイバーと y の誘導する $y' : \operatorname{Spec} k \to Y'$ による ϕ' のファイバーを同一視するとそれが X' の閉部分スキームとして G' の高々 1 つの軌道となる，という条件である．

て図式

$$\begin{tikzcd}
S(\bar{x}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G_{\bar{s}} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & S(1_{X_{\bar{s}}}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G_{\bar{s}} \times_{\Bbbk} X_s \arrow[d, "(\sigma, 1_{X_{\bar{s}}})"] \\
\operatorname{Spec} \Bbbk \arrow[r, "\bar{x}"] \arrow[dr, "1_{\Bbbk}"'] & \phi^{-1}(\phi(\bar{x})) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X_{\bar{s}} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\phi"] & X_{\bar{s}} \times_{\Bbbk} X_{\bar{s}} \\
 & \operatorname{Spec} \Bbbk \arrow[r, "\phi(\bar{x})"] & Y_{\bar{s}} &
\end{tikzcd}$$

を得る．ここで，$X_{\bar{s}} := X \times_S \operatorname{Spec} \Bbbk$ などとおいた．$S(\bar{x})$ は $G_{\bar{s}}$ の $X_{\bar{s}}$ への作用に関する $\bar{x} : \operatorname{Spec} \Bbbk \to X_{\bar{s}}$ の stabilizer である．左上のファイバー積の図式で次元を計算することによって[*11]，任意の $x \in X$ に対して

$$\sigma(x) + \tau(x) = g$$

を得る．上半連続性と合わせると，σ と τ は X 上の連結成分上で一定であることがわかる． □

このChevalleyによる絶対開写像の特徴付けから，次の重要な判定法が得られる．

命題 1.24 X と Y は既約，正規かつ Noether 的な S スキームとし，$\phi : X \to Y$ を支配的な有限型 S 射とする．加えて Y の生成点における剰余体（すなわち関数体）の標数は 0 であるとする．G は S 上有限型で絶対開な群スキームで，$\sigma : G \times_S X \to X$ で X に作用しているとする．このとき，

(i) $\phi \circ \sigma = \phi \circ p_2$

(ii) 任意の代数的閉体 k に対し，k 上の ϕ の任意の geometric fiber は，$\overline{G} := G \times_S \operatorname{Spec} k$ の作用による軌道を高々 1 つ含む．

が成り立つならば，ϕ は絶対開で，$(\phi(X), \phi)$ は X の G 作用による geometric quotient である． □

証明 まず，G が S 上絶対開であることから，Chevalley の判定法を用いて，幾何学的ファイバーとして現れる群スキーム $\overline{G}$ は全て同じ次元を持つことが分かる．従って，注意 1.23 の後半によって ϕ の幾何学的ファイバーは全て同じ次元をもつから，再び Chevalley の判定法より ϕ は絶対開である．主張の後半を示す．geometric quotient の定義の条件の (i), (ii) はよい．(iii) は $\phi : X \to \phi(X)$ が全射な開写像であることから従っている．

従って，条件 (iv) を確かめればよい．まず，ϕ が支配的であることから，$x \in X$ に対して局所環の準同型 $\phi_x^* : \mathcal{O}_{Y,\phi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ の核 $\operatorname{Ker} \phi_x^*$ は局所環 $\mathcal{O}_{Y,\phi(x)}$ のべき零根基に含まれる．しかし，Y は被約スキームであることから局所環も被約，すなわちべき零根基は自明なので，$\operatorname{Ker} \phi_x^* = 0$ となり，ϕ_x^* は単射である．従って層の射 $\phi^* : \mathcal{O}_{\phi(X)} \to \phi_* \mathcal{O}_X$ は単射である．

以上の議論から，任意の開集合 $U \subset \phi(X)$ に対して，$\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \subset \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ となる．$f \in \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ を invariant section であるとする．$f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ であることが示されれば良い．U' を $(f, \phi) : \phi^{-1}(U) \to \mathbb{A}^1 \times U$ の像の閉包に被約なスキーム構造を入れた $\mathbb{A}^1 \times U$ の閉部分整スキームとする．次

[*11] cf. [Ha77, Chap.II, Ex 3.22]

の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & \phi^{-1}(U)\times_U U' \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & & & \\
\phi^{-1}(U) \arrow[rr, dotted, "\phi'"] \arrow[dr, "\phi"'] \arrow[rrrr, dotted, bend left, "f"] & & U' \arrow[r, hook, "i"'] \arrow[dl, "\bar{\omega}"'] & \mathbb{A}^1\times U \arrow[r, "p_1"'] \arrow[dll, "p_2"] & \mathbb{A}^1 \\
 & U & & &
\end{tikzcd}$$

$\bar{\omega} := p_2 \circ i : U' \to U$ が同型であることを示せば良い．なぜならば，このとき合成

$$f' := p_1 \circ i \circ \bar{\omega}^{-1} : U \to U' \hookrightarrow \mathbb{A}^1 \times U \to \mathbb{A}^1$$

によって $f' \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ と定めれば，図式

$$\begin{tikzcd}
\phi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f"'] & U \arrow[d, "f'"] \\
 & \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}$$

の可換性より，$f = f' \in \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \subset \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ となるからである．

以下で，$\bar{\omega}$ が同型であることを証明する．

2 つの幾何学的点 $x, x' : \operatorname{Spec}\Bbbk \to U$ で，像の点 $x(\operatorname{Spec}\Bbbk), x'(\operatorname{Spec}\Bbbk) \in U'$ が射 $\phi' : \phi^{-1}(U) \to U'$ の（集合論的な）像に入っていて，かつ $x \circ \bar{\omega} = x' \circ \bar{\omega}$ となるものを取る．以下ではこのとき $x = x'$ となることを示す．拡大 $\Bbbk \subset \Omega$ に対して Ω-値点

$$\bar{x} : \operatorname{Spec}\Omega \to \operatorname{Spec}\Bbbk \xrightarrow{x} U$$
$$\bar{x'} : \operatorname{Spec}\Omega \to \operatorname{Spec}\Bbbk \xrightarrow{x'} U$$

が自然に定義される．このとき，$\bar{x} = \bar{x'}$ ならば $x = x'$ となるので，代数的閉体 $\Bbbk$ は必要に応じて大きく取り直して良い．十分大きく取り直すことで，2 つの幾何学的点 x, x' が $y, y' : \operatorname{Spec}\Bbbk \to \phi^{-1}(U) \subset X$ を経由するとして良い．

$$\bar{\omega} \circ \phi' \circ y = \bar{\omega} \circ \phi' \circ y'$$

を満たすので，$\bar{\omega} \circ \phi' = \phi$ より，$\phi \circ y = \phi \circ y'$ である．y, y' の軌道はそれぞれ

$$\Psi_y : G \times_S \operatorname{Spec}\Bbbk \to X \times_S \operatorname{Spec}\Bbbk,\ \Psi_{y'} : G \times_S \operatorname{Spec}\Bbbk \to X \times_S \operatorname{Spec}\Bbbk$$

の像で与えられていたことを思い出そう（定義 1.9）．これらが幾何学的ファイバー $\phi^{-1}(\phi \circ y) = \phi^{-1}(\phi \circ y')$ に含まれることは図式を書けば簡単に分かる．このとき仮定 (ii) によりこれらの軌道は一致するので（再び $\Bbbk$ を大きく取りなおせば）$y' : \operatorname{Spec}\Bbbk \to X$ は，y によって定まる $G \times_S \operatorname{Spec}\Bbbk$ から X への射

$$[G \times_S \operatorname{Spec}\Bbbk \xrightarrow{\Psi_y} X \times_S \operatorname{Spec}\Bbbk \xrightarrow{p_1} X] = [G \times_S \operatorname{Spec}\Bbbk \xrightarrow{1_G \times y} G \times_S X \xrightarrow{\sigma} X]$$

を経由する．f は invariant section なので，次の図式

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}\Bbbk \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "y'"] \arrow[ddr, bend right, "y"'] & & \\
& G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & \mathbb{A}^1
\end{tikzcd}
$$

が可換になり，$f \circ y = f \circ y'$ が従う．よって $U' \subset \mathbb{A}^1 \times U$ の中で

$$x = \phi' \circ y = (f \circ y, \phi \circ y) = (f \circ y', \phi \circ y') = \phi' \circ y' = x'$$

となる．以上から，$\bar{\omega}$ は $\phi'(\phi^{-1}(U)) \subset U'$ に制限したとき，幾何学的単射*12である．ここで，$\phi'(\phi^{-1}(U))$ は U' の稠密な部分集合であり，また生成点の像が生成点なので，U' の生成点を含む．

U, U' の関数体をそれぞれ $K(U), K(U')$ とすると，$K(U')$ は $K(U)$ の拡大体である．$e : \operatorname{Spec} K(U) \to \operatorname{Spec} K(U')$ を対応する射とする．$x, x' : \operatorname{Spec} \Omega \to \operatorname{Spec} K(U')$ を幾何学的点であって，$e \circ x = e \circ x'$ となるようなものとする．このとき可換性

$$[\operatorname{Spec} K(U') \to \operatorname{Spec} K(U) \to U] = [\operatorname{Spec} K(U') \to U' \to U]$$

ならびに，$U' \to U$ の生成点における幾何学的単射性から $x = x'$ が従うので，$e : \operatorname{Spec} K(U') \to \operatorname{Spec} K(U)$ も幾何学的単射である．よって，次の補題から拡大 $K(U')/K(U)$ が純非分離拡大であることが従う．

補題 1.25（[Go10, Corollary B.99]）　体の拡大 $k \to K$ に対して，次は同値である．

(a)　$k \to K$ は純非分離代数拡大である．
(b)　任意の体の拡大 $k \to L$ に対して，高々 1 つの k-埋め込み $K \to L$ しか存在しない．
(c)　任意の拡大 L/k に対して，環 $K \otimes_k L$ は唯 1 つの素イデアルを持つ．

実際，$K(U')/K(U)$ が純非分離拡大でないならば，ある拡大 $L/K(U)$ であって $K(U)$-埋め込み $K(U') \to L$ が 2 通り以上存在するようなものが取れる．$\overline{L}$ を L を含む代数的閉体とすると $\overline{L}$-値点の間の写像

$$(\operatorname{Spec} K(U'))(\overline{L}) \to (\operatorname{Spec} K(U))(\overline{L})$$

は単射ではないので，拡大の幾何学的単射性に矛盾する．

特に，Y の（すなわち U の）生成点における標数が 0 であることから純非分離拡大は自明なものしか存在しない．したがって関数体が一致 $K(U') = K(U)$ すること，すなわち $\bar{\omega}$ は双有理写像であることが分かった．

一方，$\bar{\omega}$ は閉埋め込み $U' \subset \mathbb{A}^1 \times U$ と射影 $\mathbb{A}^1 \times U \to U$ の合成である．閉埋め込みは分離射で，射影 $\mathbb{A}^1 \times U \to U$ もアフィン射 $\mathbb{A}^1 \to S$ の $U \to S$ による基底変換であるから分離的，従って $\bar{\omega}$ も分離的である．射 $\phi' : \phi^{-1}(U) \to U'$ によって，以下の図式のように p_1 の切断 $\tau : \phi^{-1}(U) \to \phi^{-1}(U) \times_U U'$ が得られる．$\bar{\omega}$ が分離的なので，その基底変換である p_1 も分離的である．よって以下の図式における像

*12 幾何学的点の対応が単射であるとき，**幾何学的単射 (geometrically injective)** であるという．

$\tau(\phi^{-1}(U)) \subset \phi^{-1}(U) \times_U U'$ は閉集合である[*13].

$$\begin{tikzcd}
\phi^{-1}(U) \arrow[drr, bend left, "\phi'"] \arrow[dr, dotted, "\tau"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
& \phi^{-1}(U) \times_U U' \arrow[r, "p_2"'] \arrow[d, "p_1"] & U' \arrow[d, "\bar{\omega}"] \\
& \phi^{-1}(U) \arrow[r, "\phi"'] & U
\end{tikzcd}$$

ϕ は絶対開であるから，基底変換で得られた $p_2 : \phi^{-1}(U) \times_U U' \to U'$ も開写像である．特に，

$$V := p_2(\phi^{-1}(U) \times_U U' \setminus \tau(\phi^{-1}(U)))$$

は U' の開集合である．V の幾何学的点 y' に対しては，$\phi'(x) \neq y'$ かつ $\phi(x) = \bar{\omega}(y')$ となる $\phi^{-1}(U)$ の幾何学的点 x が存在する[*14][*15]．もし $\phi'(x') = y'$ となる $\phi^{-1}(U)$ の幾何学的点 x' があったとすると，$\bar{\omega}(\phi'(x')) = \bar{\omega}(y') = \phi(x) = \bar{\omega}(\phi'(x))$ となり，$\bar{\omega}$ が ϕ' の像の上で幾何学的単射であることから $\phi'(x) = \phi'(x')$ となり矛盾するから，開集合 V の点 y' は ϕ' の像に含まれないことが分かる．しかし，ϕ' は稠密な像をもつことから，V は空集合である．したがって，$\tau(\phi^{-1}(U)) = \phi^{-1}(U) \times_U U'$ となるので，二つの全射の合成である $\phi' = p_2 \circ \tau$ も全射である．$\bar{\omega}$ は ϕ' の像の上で幾何学的単射であったが，像が全体と一致することがわかったので，$\bar{\omega}$ は幾何学的単射である．従って，Zariski の主定理によって $\bar{\omega}$ は同型である． ■

注意 1.26　G 不変な S 射 $\phi : X \to Y$ に対して，次は同値である．

(i) (Y, ϕ) は X の G 作用による universal categorical quotient である．

(ii) 任意のアフィンスキーム Y' と射 $Y' \to Y$ に関して，基底変換 $\phi' : X' := X \times_Y Y' \to Y'$ は X' の G 作用による categorical quotient である．

(iii) Y のアフィン開被覆 $\{U_i\}$ であって，任意の i に対して (U_i, ϕ) は $\phi^{-1}(U_i)$ の G 作用による universal categorical quotient であるようなものが存在する．

また，(i) と (iii) は universal を uniform に変えても同値である． □

証明（注意 1.26 の証明） (i) から (ii) は universal であることから明らかである．(ii) から (iii) を示す．Y のアフィン開被覆 $\{U_i\}_i$ をとる．(ii) から，$\phi_i : \phi^{-1}(U_i) \to U_i$ も categorical quotient である．S スキーム V と S 射 $f : V \to U_i$ に対して，基底変換 $\phi_V : \tilde{U}_i := \phi^{-1}(U_i) \times_{U_i} V \to V$ が categorical quotient であることを示す．S 射 $\psi : \tilde{U}_i \to Z$ で，図式

$$\begin{tikzcd}
G \times \tilde{U}_i \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & \tilde{U}_i \arrow[d, "\psi"] \\
\tilde{U}_i \arrow[r, "\psi"] & Z
\end{tikzcd}$$

[*13] 分離射の切断は閉埋め込みになる [Go10, Example 9.12].

[*14] ここでは，先ほどと同じように幾何学的点は十分大きな代数的閉体からの射を考えている．

[*15] y' の $\phi^{-1}(U) \times_U U' \setminus \tau(\phi^{-1}(U))$ へのリフト z をとり，その p_1 による像と $x := p_1(z)$ とすればよい．実際，$\phi'(x) = y'$ だったと仮定すると，ファイバー積の普遍性から $z = \tau(x) \in \tau(\phi^{-1}(U))$ となって矛盾する．

を可換にするものをとる．V のアフィン開被覆 $V = \bigcup_{k\in K} V_k$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
\phi_V^{-1}(V_k) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi_V"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \tilde{U}_i \arrow[r] \arrow[d, "\phi_V"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \phi^{-1}(U_i) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "\phi"'] \\
V_k \arrow[r, hook] & V \arrow[r, "f"'] & U_i \arrow[r, hook] & Y
\end{tikzcd}$$

基底変換の推移性と条件 (ii) から $\phi_V^{-1}(V_k) \to V_k$ は categorical quotient であるので，S 射 $V_k \to Z$ で図式

$$\begin{tikzcd}
\phi_V^{-1}(V_k) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
V_k \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

を可換にするものが一意的に存在する．これらを各 k で貼り合わせることによって，$V \to Z$ で図式

$$\begin{tikzcd}
\tilde{U}_i \arrow[d] \arrow[dr] & \\
V \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

を可換にするものが構成できる．従って，$\phi_V : \tilde{U}_i \to V$ は categorical quotient であり，$\phi : \phi^{-1}(U_i) \to U_i$ は universal categorical quotient である．

(iii) から (i) が従うことを示す．(iii) の開被覆における categorical quotient の定義の (i) の可換図式を貼り合わせることによって，(Y, ϕ) も categorical quotient の定義の (i) を満たすことがわかる．同様に，逐一アフィン開被覆をとって議論してから全体に貼り合わせることで，(Y, ϕ) が universal categorical quotient であることが証明できる．uniform の場合も同様． ■

注意 1.27　後に，geometric quotient とは限らない場合に categorical quotient を判定したいときが出てくる（例えば，後の定理 2.14 をみよ）．以下の判定法はそのようなときに用いる．

(Y, ϕ) が categorical quotient であるための十分条件は次で与えられる．

(i) $\phi \circ \sigma = \phi \circ p_2$ が成り立つ．

(ii) $\mathcal{O}_Y$ は $\phi_* \mathcal{O}_X$ の invariant section からなる部分層である．

(iii) G 不変な閉部分集合 $W_i \subset X$ たちに対して $\phi(W_i)$ は閉集合で，

$$\phi\left(\bigcap_i W_i\right) = \bigcap_i (\phi(W_i))$$

が成り立つ[*16]．

また，このとき ϕ は submersive になる． □

証明（注意 1.27 の証明）　条件の (ii) によって，$\phi : X \to Y$ は支配的射である．また，条件の (iii) より $\phi(X)$ は閉集合なので，ϕ は全射である．$\psi : X \to Z$ を S 射であって categorical quotient の定義の (i)

[*16] スキーム X と添え字集合は空でないとしている．

を満たすようなものとする．$Z = \bigcup_i V_i$ を Z のアフィン開被覆とする．もし，Y の開被覆 $Y = \bigcup_i U_i$ で，$\psi^{-1}(V_i) \supset \phi^{-1}(U_i)$ となるようなものが存在すれば，命題 1.18 と同様にして，(Y, ϕ) が categorical quotient であることが従う．

$W_i := X \setminus \psi^{-1}(V_i)$ と定める．条件 (iii) から $U_i := Y \setminus \phi(W_i)$ は Y の開集合である．このようにして作れば，$\psi^{-1}(V_i) \supset \phi^{-1}(U_i)$ である．また，$\bigcap_i W_i = \emptyset$ であることから条件 (iii) より $\bigcap_i \phi(W_i) = \emptyset$ であるから，$\{U_i\}_i$ は Y の開被覆をなしている．

最後に，ϕ が submersive であることを示そう．$Z \subset Y$ を任意の部分集合で，$\phi^{-1}(Z)$ が閉集合となるようなものとする．条件 (i) から $\phi^{-1}(\mathrm{Z})$ は G 不変な閉集合であるから，条件 (iii) より $\phi(\phi^{-1}(Z))$ は閉集合である．ϕ は全射であったので，$\phi(\phi^{-1}(Z)) = Z$ である．したがって，Z も閉集合である．これで ϕ が submersive であることが示された． ■

注意 1.28 (Y, ϕ) を X の G による geometric quotient であるとする．geometric quotient の定義の (i) および (ii) は基底変換 $f : Y' \to Y$ で保たれるが，よりデリケートな条件である (iv) は一般には保たれない．しかし，$f : Y' \to Y$ が flat であるときは，条件 (iv) は保たれる．以下でこのことを証明する．$\psi = \phi \circ \sigma = \phi \circ p_2 : G \times_S X \to Y$ とおく．条件 (iv) から，開集合 $U \subset Y$ に対して，$s \in \Gamma(U, \phi_* \mathcal{O}_X) = \Gamma(\phi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ が $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ に含まれるための条件は $\sigma^*(s) = p_2^*(f)$ (in $\Gamma(U, \psi_* \mathcal{O}_{G \times_S X})$) となることであるから，

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow \Gamma(U, \phi_* \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sigma^* - p_2^*} \Gamma(U, \psi_* \mathcal{O}_{G \times_S X})$$

は完全，従って層の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \phi_* \mathcal{O}_X \xrightarrow{\sigma^* - p_2^*} \psi_* \mathcal{O}_{G \times_S X}$$

が得られる．flat base change theorem [*17]([SP, Tag 02KH]) より，

$$f^* \phi_* \mathcal{O}_X \simeq \phi'_* \mathcal{O}_{X'}$$
$$f^* \psi_* \mathcal{O}_{G \times_S X} \simeq \psi'_* \mathcal{O}_{G \times_S X'}$$

となり（ここで，$X' := X \times_Y Y'$ などとおいた），flat 射による層の引き戻し f^* は完全関手であるから

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'} \longrightarrow \phi'_* \mathcal{O}_{X'} \xrightarrow{\sigma^* - p_2^*} \psi'_* \mathcal{O}_{G \times_S X'}$$

は再び完全列であり，よって最初の議論から Y' は geometric quotient の定義の条件 (iv) を満たす． □

注意 1.29 一方で，前の注意と逆向きの方向の主張としては，次のようなことが成り立つ：

$f : Y' \to Y$ が faithfully flat であり，かつ準コンパクトであるとする．このとき，基底変換で得られる射 $\phi' : X' := X \times_Y Y' \to Y'$ が X' の G による universal categorical quotient，または geometric quotient，または universal geometric quotient であるならば，(Y, ϕ) は X の G による quotient として，同じ type の quotient になる．このことは，descent の一般論から従う[*18] □

*17 [GIT] 内では全く言及されていないが，flat base change theorem を適用するためには，ϕ や ψ がある種の有限性を満たしている必要があると思う．例えば引用した Stacks Project でも，push-forward の射に準分離性と準コンパクト性（いわゆる qcqs）を仮定している．

*18 僕はまだチェックしていない．