1.3 Good and Bad Actions

群スキーム G の X への作用 $\sigma : G \times_S X \to X$ を考える．

定義 1.30（closed, separated, proper and free actions） S 上の群スキーム G から S スキーム X への作用を σ とする．

(i) 任意の幾何学的点 $x : \mathrm{Spec}\,\Omega \to X$ に対して，軌道 $O(x) \subset \overline{X} := X \times_S \mathrm{Spec}\,\Omega$ が閉集合になるとき，σ は**閉 (closed)** であるという．

(ii) 射

$$\Psi = (\sigma, p_2) : G \times_S X \longrightarrow X \times_S X$$

の像が閉集合であるとき，σ は**分離的 (separated)** であるという．

(iii) Ψ が固有射であるとき，σ は**固有 (proper)** であるという．

(iv) Ψ が閉埋め込みであるとき，σ は**自由 (free)** であるという．

さらに，$\mathcal{S} = S(1_X)$ を $1_X : X \to X$ の stabilizer として定める．これは X 上の群スキーム $G \times_S X$ の部分群スキームになる． □

$\omega : \mathcal{S} \to X$ を射影，$e_X : X \to \mathcal{S}$ を identity section とする．各点 $x \in X$ に対して，$\mathrm{Spec}\,k(x)$ 上のスキーム $\omega^{-1}(x)$ の点 $e_X(x)$ における次元を $\sigma(x)$ で表す．X が Noether 的で G が S 上有限型であるとき，$\sigma(x)$ は有限で上半連続である（EGA 4, 13.1）．

定義 1.31（regular point） X が Noether 的で G が S 上有限型であるとする．$S_r(X) := \{x \in X \mid \sigma(x) \geq r\}$ とおく．$\sigma(x)$ の上半連続性より $S_r(X)$ は閉集合である．さらに，$x \in X$ に対して，σ が定数関数になるような近傍が存在するとき x は **regular** であるという． □

注意 1.32 G の作用による X の regular point のなす部分集合 X^{reg} は，定義から X の開集合となる．また，G が S 上有限型かつ universally open であり，X の G による geometric quotient (Y, ϕ) が存在し Y が Noether 的，ϕ が有限型であると仮定する．このとき，σ は注意 1.23 で定義されたものと一致していることから同注意より定数関数であり，よって X の任意の点は regular point，すなわち $X^{\mathrm{reg}} = X$ となる． □

また，次の補題は非常に便利である．

補題 1.33 G が S 上有限型で，$X^{\mathrm{reg}} = X$ であると仮定する．このとき，G の作用は closed である． □

この主張は X が S 上有限型であるかに関わらず成立することに注意しよう．

証明 X の幾何学的点 x に対して，構造射 $f : X \to S$ による像の幾何学的点 $f(x)$ で基底変換することにより，代数閉体 k に対して $S = \mathrm{Spec}\,k$ であるとしてよい．このとき，合成

$$\psi_x : G \simeq G \times_k \mathrm{Spec}\,k \xrightarrow{1 \times x} G \times X \xrightarrow{\sigma} X$$

が閉写像であることを示す．各既約成分をとって議論することで，G は既約であると仮定してよい．このとき，幾何学的点 $x \in X(k)$ に対し，G 軌道 $O(x)$ は既約である．$\overline{O(x)}$ を $O(x)$ の閉包（これも既約である），

$y \in X$ を $\overline{O(x)}$ の生成点とすると，$\dim \overline{O(x)} = \mathrm{tr.deg}_k k(y)$ である[*19]ことと合わせて，

$$\mathrm{tr.deg}_k k(y) + \sigma(y) = \dim G$$

を得る．G の作用が閉でないとすると，ある幾何学的点 $x_1 \in X(k)$ が存在して，$\overline{O(x_1)} \setminus O(x_1) \neq \emptyset$ である．$x_2 \in X(k)$ を $\overline{O(x_1)} \setminus O(x_1)$ に含まれる幾何学的点とすると，$\overline{O(x_1)}$ と $O(x_1)$ が両方 G 不変な部分集合であることから，$O(x_2) \subset \overline{O(x_1)} \setminus O(x_1)$ となる．x_2 は regular point なので，x_2 の開近傍 $U \subset X$ が存在して，任意の $x \in U$ に対して $\sigma(x) = \sigma(x_2)$ が成り立つ．y_1, y_2 をそれぞれ $\overline{O(x_1)}, \overline{O(x_2)}$ の生成点とすると，x_2 が $\overline{O(x_1)}$ と $\overline{O(x_2)}$ の両方に含まれていることから $y_1, y_2 \in U$ であるので，$\sigma(y_1) = \sigma(y_2)$ が成立する．以上から，$\mathrm{tr.deg}_k k(y_1) = \mathrm{tr.deg}_k k(y_2) < \infty$ となるが，これは既約閉集合の包含 $\overline{O(x_1)} \supset \overline{O(x_2)}$ で次元が下がることに矛盾している．従って，G の X への作用が閉作用であることが示された． ■

補題 1.34 k を代数的閉体，$S = \operatorname{Spec} k$，$X, G$ を k 上の代数的スキーム，$\sigma : G \curvearrowright X$ を G の X への作用，$x \in X(k)$ を幾何学的点とする．このとき，$\psi_x : G \to X$ が固有射であるための必要十分条件は，軌道 $O(x)$ が閉集合で，stabilizer $S(x) \subset G$ が k 上固有であることである． □

証明 ψ_x が固有射であるとする．固有射の像は定義から閉集合なので，$O(x) = \psi_x(G) \subset X$ は閉集合であり，固有射は基底変換で保たれるから，図式

$$\begin{tikzcd} S(x) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G \arrow[d, "\psi_x"] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r, "x"'] & X \end{tikzcd}$$

により，$S(x)$ が k 上の固有スキームであることもわかる．

逆を示す．射 ψ_x が有限型であることは明らかなので，あとは絶対閉であること及び分離的であることを示せばよい．これらはスキームの底位相空間によって決まる性質であるから，$G = G_{\mathrm{red}}$ としてよい．このとき，閉集合 $O(x) \subset X$ に被約スキーム構造を入れたものを Z とすると，G および Z は G の作用で等質な被約スキームであるから，特に非特異である[*20]．閉埋め込み $Z \subset X$ は固有射なので，$\psi'_x : G \to Z$ が固有射であることを確かめればよい．ここで，ψ'_x はファイバーの次元が $\dim S(x)$ で一定であるから，ψ'_x は flat 射である ([Ha77] Chap.III, Exercise 10.9.)．図式

$$\begin{tikzcd} G \times_Z G \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G \arrow[d, "\psi'_x"] \\ G \arrow[r, "\psi'_x"'] & Z \end{tikzcd}$$

に SGA1, Chap.VIII, Cor 4.7. を適用することで，$p_2 : G \times_Z G \to G$ が固有射であることを確かめれば十分である．$\mu' := \mu_{|S(x) \times G} : S(x) \times G \longrightarrow G$ と定めると，$(\mu', p_2) : S(x) \times G \longrightarrow G \times_Z G$ が定まるが，

$$(S(x) \times G)(k) = \{(g, g') \in (G \times G)(k) \mid gx = x\}$$
$$(G \times_Z G)(k) = \{(g, g') \in (G \times G)(k) \mid gx = g'x\}$$

[*19] c.f. [Ma89] Theorem 5.6.

[*20] [Ha77] Chap.II, Corollary 8.16. 及び Chap.III, Example 10.7.2. を見よ．

であることより，

$$(\mu', p_2)(k) : (S(x) \times G)(k) \longrightarrow (G \times_Z G)(k), \quad (g, g') \longmapsto (gg', g')$$

は全単射であるから，$(\mu', p_2) : S(x) \times G \to G \times_Z G$ は同型であり，したがって $\psi'_x \circ (\mu', p_2) : S(x) \times G \to G$ が固有射であることが示されればよいが，実際これは $p_2 : S(x) \times G \to G$ と一致しているので，固有射 $S(x) \to \operatorname{Spec} k$ の基底変換になっていることから固有射である． ■

作用の（大域的な）固有性，すなわち $\Psi : G \times X \to X \times X$ の固有性は，ψ_x の固有性よりもずっと成立が微妙な条件であり，ψ_x が固有射であるような状況に限っても，Ψ は固有になったり固有にならなかったりする．以下では，例 1.35 で作用が固有にならないような例，補題 1.36 で作用が固有になるような条件の例を与える．

例 1.35　複素数体 $\mathbb{C}$ 上の半単純群 G と，その滑らかで $\mathbb{C}$ 上有限型な準アフィンスキームへの作用であって，次の条件を満たすものが存在する：

(i) 任意の stabilizer が自明な群 e である．すなわち，作用が集合論的意味で自由である．
(ii) geometric quotient で，$\mathbb{C}$ 上有限型な分離的スキームであるものが存在する．（後の補題 1.37 より，このときの作用は分離的であることが分かる．）
(iii) 作用は固有でない．特に，我々の意味では自由な作用ではない．

証明　また今度.

補題 1.36　k を体，X を k 上の分離的な代数的スキーム，$\sigma : \mathbb{G}_m \curvearrowright X$ を作用とする．X は射影空間への埋め込み $X \subset \mathbb{P}^n_k$ であって，この埋め込みによって $\mathbb{G}_m$ の作用が射影空間 $\mathbb{P}^n_k$ 全体に伸びるようなものを持つとする．このとき，次の同値

$$\sigma \text{は固有作用である．} \iff \begin{array}{l} \text{(i) } \sigma \text{ は分離的作用であり，} \\ \text{(ii) } S_1(X) = \emptyset \text{ となる．} \end{array}$$

が成り立つ． □

証明　σ が固有作用であると仮定する．このとき，固有射の定義から σ は分離的作用であり，$\Psi : \mathbb{G}_m \times X \to X \times X$ が固有射であることから任意の閉点 $x \in X$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} S(x) & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \times X \\ \downarrow & \square & \downarrow \Psi \\ \operatorname{Spec} k(x) & \xrightarrow[(x,x)]{} & X \times X \end{array}$$

により $S(x)$ は $k(x)$ 上の固有スキームであるが，これはアフィンスキーム $\mathbb{G}_m \times \operatorname{Spec} k(x)$ の閉部分スキームであることから，有限個の点からなるスキームであることがわかる．従って $S(x)$ は 0 次元であるので，$S_1(X) = \emptyset$ である．

次に，σ が分離的で，$S_1(X) = \emptyset$ が成り立つとして，σ が固有作用であることを示そう．これには，付値判定法 (valuative criterion) （[Ha77] Chap.II, Theorem 4.7.）を用いる． ■