1.4 Further Properties

この節を通して，(Y,ϕ) は X/S の G/S による geometric quotient であるとする．

補題 1.37 geometric quotient (Y,ϕ) が存在するならば，作用 $\sigma : G \curvearrowright X$ は閉作用である．さらに，Y が S 上分離的であるならば，作用 σ は分離的である． $\square$

証明 代数的閉体 Ω に対して，X 上の幾何学的点 $x : \operatorname{Spec}\Omega \to X$ を考える．$\overline{X} := X \times_k \operatorname{Spec}\Omega$，$\overline{Y} := Y \times_k \operatorname{Spec}\Omega$，$\overline{\phi} : \overline{X} \to \overline{Y}$ と表すことにすると，

$$O(x) = \overline{\phi}^{-1}(\overline{\phi}(x))$$

である．Ω 上のスキームの Ω 値点は閉点であるので，特に $\overline{\phi}(x)$ は閉点．従って $O(x)$ は閉集合である．

(Y,ϕ) は geometric quotient であるので，$\Psi : G \times_S X \to X \times_S X$ の像は $X \times_Y X$ である．ここで，次の図式

$$\begin{tikzcd} X \times_Y X \arrow[r] \arrow[d, "\phi\circ p_i"'] & X \times_S X \arrow[d, "\phi\times\phi"] \\ Y \arrow[r, "\Delta"'] & Y \times_S Y \end{tikzcd}$$

はファイバー積の図式であり，ϕ が universally submersive であることから $\phi \times \phi$ も submersive であるので，

$$\begin{aligned} \Delta(Y) \text{ が } Y \times_S Y \text{ の閉集合} &\Leftrightarrow (\phi\times\phi)^{-1}(\Delta(Y)) \text{ が } X \times_S X \text{ の閉集合} \\ &\Leftrightarrow X \times_Y X \text{ が } X \times_S X \text{ の閉集合} \end{aligned}$$

となるから，Y が S 上分離的であることと，σ が分離的な作用であることは同値である． $\blacksquare$

命題 1.38 体 k に対して $S = \operatorname{Spec} k$ であり，G, X, Y は k 上の分離的な代数的スキームであるとする．このとき，G がアフィンで作用 σ が固有ならば，ϕ はアフィン射である． $\square$

証明 まず，Y が切断 $s : Y \to X$ をもつと仮定する．次の可換図式を考える

$$\begin{tikzcd} G \times Y \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[ddd, "1_G \times s"'] & & X \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[ddd, "(1_X, s\circ\phi)"] \\ & Y \arrow[d, "s"] & \\ & X & \\ G \times X \arrow[ur, "p_2"] \arrow[rr, "\Psi"'] & & X \times_Y X \arrow[ul, "p_2"'] \end{tikzcd}$$

作用 σ が固有なので Ψ は固有射であり，したがって基底変換である τ も固有射である．また，G がアフィンなので，$p_2 : G \times Y \to Y$ はアフィン射である．$U \subset Y$ を Y のアフィン開集合とする．$p_2^{-1}(U)$ はアフィン多様体であり，固有な全射 $\tau : p_2^{-1}(U) \to \phi^{-1}(U)$ が存在する．この τ のファイバーは固有かつアフィンなので，τ は有限全射であることがわかる．アフィン多様体からの有限全射があれば，値域の多様体もアフィンである．したがって，ϕ もアフィン射になる．

一般の場合にも，基底変換 $\pi : Y' \to Y$ を考えることで ϕ が切断をもつ場合に帰着させる．ここで，$\phi' : X \times_Y Y' \to Y'$ がアフィンである場合であると仮定する．図式

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "p_2"'] & Y' \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "\phi"] & Y \end{tikzcd}$$

を考える．直前と類似の議論によって，π が有限な全射であるならば ϕ がアフィンであることがわかる．射がアフィンであるというのは局所的な性質なので，これは Y のアフィン開近傍 $\{U_i\}$ に対して $\pi : \bigcup U_i \to Y$ を埋め込みでとったときにも正しい．したがって，注意 1.23 より，証明は次の補題に帰着される：

補題 1.39 $\phi : X \to Y$ が代数的スキームの間の有限型な全射で，絶対開であるものとする．このとき，基底変換 $\pi : Y' \to Y$ であって次の 2 種類の写像

(i) 有限型な全射
(ii) 開被覆 $\{U_i\}$ に対し，それらの非交和からの自然な射 $\coprod U_i \to Y$

の合成で得られるもので，尚且つ $\phi' : X \times_Y Y' \to Y'$ が切断を持つようなものが存在する． □

証明 まず，Y_1 を Y_{red} の正規化として，$\pi_1 : Y_1 \to Y$，$X_1 := X \times_Y Y_1$，$\phi_1 : X_1 \to Y_1$ と定める．ϕ は条件から開写像かつ全射なので，X_1 の連結成分の像は Y_1 の連結成分になり，ϕ の基底変換である ϕ_1 のファイバーは，全て同じ次元を持つ．ここで，任意の $y \in Y_1$ に対して，$x \in X_1$ を $\phi_1(x) = Y$ となる X_1 の閉点とする．（全射なので，このような点は少なくとも一つある．射が有限型なので，剰余体 $k(x)$ は $k(y)$ の有限次拡大である．したがって，x は閉点としてとれる．）まず，被約かつ既約な閉部分スキーム $H \subset X_1$ であって，

(i) $\dim H = \dim Y_1$,
(ii) x は $H \cap \phi_1^{-1}(y)$ の孤立点

となるようなものが存在する．このような H は例えば次のようにして構成することができる：$n := \dim \phi_1^{-1}(y)$ とする．$f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_{X,x_1}$ を巴系 (system of parameters) とする．H を $f_1, \ldots, f_n$ の vanishing locus として定める．ファイバーの次元が全て同じであるから，$\dim H = \dim X_1 - n = \dim Y_1$ である．

このとき，H の関数体 $k(H)$ は $k(Y_1)$（または y を含む Y_1 の成分 Y_y に対して $k(Y_y)$）の有限次代数拡大である．$L \supset k(H)$ を有限次代数拡大で，$k(Y_1)$ の Galois 拡大上純非分離になっているものとする．Y' を，Y_1 の L の中での正規化とする．

ここで，次の主張を示す：

主張 射影 $X_1 \times_{Y_1} Y' \to Y'$ は，任意の $y' \in Y'$ で y 上にあるものに対し，そのある近傍 U' で切断をもつ．

関数体の拡大 $L \supset k(H)$ によって定まる有理写像 $Y' \dashrightarrow H$ を考える．この有理写像が $y' \in Y$ で y 上にあるものの近傍 U' では射になっていることを示す．もしこのことが示されれば，$H \hookrightarrow X_1$ と $U' \to H$ を合成することで，射影 $X_1 \times_{Y_1} Y' \to Y'$ の U' での切断が定まる．

$$
\begin{tikzcd}
U' \arrow[dd] \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] & & \\
& X_1 \times_{Y_1} U' \arrow[r] \arrow[d] & U' \arrow[d] \\
H \arrow[r, hook] & X_1 \arrow[r] & Y_1
\end{tikzcd}
$$

H' を H の L の中での正規化とする．このとき，$H \to Y_1$ は射であるから，これから定まる双有理写像 $H' \to Y'$ は射になっている．$x' \in H'$ を $x \in H$ 上の点とする．仮定の (ii) によって，x は $H \to Y_1$ のファイバーの孤立点である．したがって，x' は $H' \to Y$ のファイバーの孤立点であることが従う．Zariski の主定理によって，射 $H' \to Y'$ は x' のある近傍 U' で同型である．同型によって同一視して $U' \subset Y'$ とみなす．有理写像 $Y' \dashrightarrow H$ は，この開集合 $U' \subset Y'$ 上では合成 $U' \hookrightarrow H' \to H$ に一致するので，射になっている．以上で，主張の証明が終わった．

主張を用いることで，y の開近傍 $U_y \subset Y_1$ であって，U_y の逆像を $V_y \subset Y'$ とすると，射影 $X_1 \times_{Y_1} Y' \to Y'$ が V_y の各点の近傍で切断をもつようなものが構成できる．このような U_y たちの有限個の非交和を $Y_2 \bigsqcup U_y$ とする．これらの U_y たちに対応する V_y の非交和をとったものを Y_3 とする．$Y_3 \to Y_2$ は有限な全射である．最後に，V_y たちの各点の近傍の非交和をとったものを Y_4 とする．ここまでの議論より，射影 $X_1 \times_{Y_1} Y_4 \to Y_4$ は大域切断をもつ．$X_1 \times_{Y_1} Y_4 = (X \times_Y Y_1) \times_{Y_1} Y_4 = X \times_Y Y_4$ である． ■

以上で，命題 1.38 の証明も完了した． ■

この命題 1.38 は工夫すればより一般の base scheme S について証明することができるが，ここでは省略する．ちなみに，後の章の結果を用いれば，次のような仮定の下で命題 1.38 の逆を示すことができる：

命題 1.40　体 k に対して $S = \operatorname{Spec} k$ であり，G, X, Y は k 上の分離的な代数的スキームであるとする．さらに，G が簡約代数群（定義を見よ）であり，X の任意の幾何学的点の G 作用による satabilizer が有限群であるとする．このとき，ϕ がアフィン射であるならば，作用 σ は固有である． □

証明　$\Psi : G \times G \to X \times X$ は Y 射であるから，Y のアフィン開被覆 $\{U_i\}_i$ に対して各 U_i 上で Ψ が固有であることを示せばよい．Y がアフィンであると仮定する．このとき，ϕ がアフィン射であるから X もアフィンである．かつ，補題 1.37 より作用 σ は閉作用であるから，定義 2.31 の記法を用いて

$$X = X^{\mathrm{s}}_{(0)}(\mathcal{O}_X)$$

と書ける．系 4.8 を用いて G の X への作用が固有であることが分かる． ■

定義 1.41（主ファイバー束）　(Y, ϕ) が X の G による geometric quotient であるとする．G は S 上平坦でかつ有限型であるとする．

(i)　ϕ が平坦射でかつ有限型である．
(ii)　Ψ が $G \times_S X$ と $X \times_Y X$ の同型を与える．

という二つの条件を満たすとき，X は Y 上の群 G に関する**主ファイバー束 (principal fiber bundle)** であるという． □

命題 1.42　体 k に対して $S = \operatorname{Spec} k$ であり，G が代数群，X, Y が k 上の分離的な代数的スキームであるとする．このとき，作用 σ が自由であるなら，(Y, ϕ) は X の G による geometric quotient であり，X は Y 上の群 G に関する主ファイバー束である．[*21] □

[*21] 実は，Y が代数的スキームであるという仮定は不要である．実際，X が代数的スキームであるとき，その geometric quotient も代数的スキームであることが証明できる．（定理 7.18）これは Fogarty による 1983 年（GIT 初版の出版から 18 年後）の結果である．