2 Fundamental theorems for the actions of reductive groups (Chapter 1 of GIT)

k は代数的閉であるとは限らない，一般の体とする．以下，特に断らない限り全てこの体 k 上で議論する．

2.1 Definitions

以下，アフィン代数群を単に代数群と呼ぶことにする．例えば固有な連結代数群はその任意のスキーム射に関する像も固有であることから非自明な表現を持ち得ない．従って不変式論と相性が悪いから，はじめから除外して考えてよいのである．

定義 2.1（代数群の表現） G を k 上の代数群とする．代数多様体の射 $\rho : G \to \mathrm{GL}(n,k)$ であって，代数群の積の射 $\alpha : G \times G \to G$ および $\beta : \mathrm{GL}(n,k) \times \mathrm{GL}(n,k) \to \mathrm{GL}(n,k)$ に対し，

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\rho\times\rho"'] \arrow[drr, phantom, "\circlearrowleft"] & & G \arrow[d, "\rho"] \\
\mathrm{GL}(n,k) \times \mathrm{GL}(n,k) \arrow[rr, "\beta"'] & & \mathrm{GL}(n,k)
\end{tikzcd}$$

が可換となるものを，代数群 G の**表現 (representation)** という[*22]． □

定義 2.2（双対作用） G を k 上の線型代数群，$S = \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$，$\hat{\alpha} : S \to S \otimes_k S$ を代数群の積を定める環準同型，$\hat{\beta} : S \to k$ を G の単位元を与える環準同型とする．V を k 上のベクトル空間（または R を k 代数とする．このとき，G の V（または R）への**双対作用 (dual action)** とは，線型写像 $\hat{\sigma} : V \to S \otimes_k V$ （または環準同型 $\hat{\sigma} : R \to S \otimes_k R$）であって，次の条件を満たすものをいう．

(i) 次の図式

$$\begin{tikzcd}
 & S \otimes_k V \arrow[dr, "\hat{\alpha}\otimes 1_V"] & \\
V \arrow[ur, "\hat{\sigma}"] \arrow[dr, "\hat{\sigma}"'] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft"] & & S \otimes_k S \otimes_k V \\
 & S \otimes_k V \arrow[ur, "1_S\otimes\hat{\sigma}"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換になる（または，V を R に置き換えて同様のことが成り立つ）．

(ii) 合成

$$V \xrightarrow{\hat{\sigma}} S \otimes_k V \xrightarrow{\hat{\beta}\otimes 1_V} V$$

は恒等写像である（または，V を R に置き換えて同様のことが成り立つ）． □

注意 2.3（作用と双対作用の関係） 有限次元ベクトル空間 V に代数群 $G = \operatorname{Spec} S$ が $\hat{\sigma} : V \to S \otimes_k V$ によって双対に作用しているとする．このとき，$\{e_i\}_{i=1}^n$ を V の基底とし，$\hat{\sigma}(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \otimes e_i$ と表せば，

[*22] 複素数体上の代数群を考えている場合は，解析的な表現と区別するために**有理表現 (rational representation)** と言ったりもする．

$\{a_{ij}\}_{i,j} \in S^{\oplus n^2} = \Gamma(G, \mathcal{O}_G)^{\oplus n^2} = \mathrm{Hom}_k(G, \mathbb{A}_k^{n^2})$ によって対応する射 $G \to \mathbb{A}_k^{n^2}$ が定まり，これは双対作用の定義の (i), (ii) から，G の表現 $\sigma : G \to \mathrm{GL}(n, k)$ を与えている．つまり，有限次元ベクトル空間への双対作用は，代数群 G の表現の言葉に書き換えることができる．

また，環 R への G の双対作用は，$\mathrm{Spec}\, R$ への G の作用を考えることと同じである．しかしながら，この様に双対作用の視点で捉えることが，今後の議論の大きな助けになる． □

定義 2.4（G 不変） $\hat{\sigma}$ を V への G の双対作用とする．このとき，部分ベクトル空間 $W \subset V$ は $\hat{\sigma}(W) \subset S \otimes_k W$ となるとき，G の作用で**不変 (invariant)** であるという．例えば G の双対作用をもつ環 R のイデアルが G の作用で不変であるとき，invariant ideal などと呼んだりもする．また，元 $x \in V$ は $\hat{\sigma}(x) = 1 \otimes x$ となるとき**不変 (invariant)** であるという． □

この部分空間と元に対する二つの inveriant は意味を混同しやすいので注意が必要である．

注意 2.5 G の双対作用をもつベクトル空間 V の G 不変な元全体がなす集合 V_0 を考えると，$x, x' \in V_0$ に対して，$\hat{\sigma}$ が線形写像であることから $\hat{\sigma}(x - x') = \hat{\sigma}(x) - \hat{\sigma}(x') = 1 \otimes x - 1 \otimes x' = 1 \otimes (x - x')$ となるので，V_0 は V の部分ベクトル空間である．

また，G の双対作用をもつ環 R の G 不変な元全体がなす集合 R_0 を考えると，$\hat{\sigma}$ が環準同型であることから $1 \in R_0$ であり，また $\hat{\sigma}(xx') = \hat{\sigma}(x)\hat{\sigma}(x') = (1 \otimes x)(1 \otimes x') = 1 \otimes xx'$ となるので，R_0 は R の部分環である．以下，この環 R_0 を**不変式環**と呼ぶことにする．$X = \mathrm{Spec}\, R$ とする．$\hat{\sigma}$ に対応して作用 $\sigma : G \times X \to X$ が定まる．また，標準的な射 $R \to S \otimes_k R,\ \ f \mapsto 1 \otimes f$ に対応する射は第二射影 $p_2 : G \times X \to X$ である．$f \in R$ を射 $f : X \to \mathbb{A}^1$ と同一視したとき，f が不変式である，すなわち $\hat{\sigma}(f) = 1 \otimes f$ であるということは，図式

$$\begin{CD} G \times X @>{\sigma}>> X \\ @V{p_2}VV @VV{f}V \\ X @>>{f}> \mathbb{A}^1 \end{CD}$$

が可換になるということに他ならない．すなわち，geometric quotient の定義の (iv) の意味での G 不変性に一致している． □

補題 2.6 $\hat{\sigma}$ を G の V への双対作用とする．このとき，V は G 不変な有限次元部分ベクトル空間の和集合として表せる[*23][*24]． □

証明 $v \in V$ に対して，v を含む G 不変な線型部分空間で有限次元のものが存在することを証明すればよい．$\hat{\sigma}(v) = \sum_{i=1}^n f_i \otimes v_i$ ($f_i \in S$ は k 上一次独立な元，$v_i \in V$) と表しておく．V' を $\{v_i\}_{i=1}^n$ が生成する V の有限次元部分空間とする．双対作用の定義の (ii) より，$v = (\hat{\beta} \otimes 1_V)(\hat{\sigma}(v)) = (\hat{\beta} \otimes 1_V)(\sum_i f_i \otimes v_i) = \sum_i \hat{\beta}(f_i) v_i$

[*23] このようなとき，注意 2.3 によって対応する表現は**局所有理表現 (locally rational representaiton)** であるという

[*24] Mumford は，この補題を Cartier に教わったらしい．

となるので，$v \in V'$ である．また，V' は G 不変部分空間である．なぜならば，双対作用の定義の (i) より

$$\begin{aligned}\sum_i f_i \otimes \hat{\sigma}(v_i) &= (1_S \otimes \hat{\sigma})(\sum_i f_i \otimes \hat{\sigma}(v_i)) \\ &= (1_S \otimes \hat{\sigma})(\hat{\sigma}(v)) \\ &= (\hat{\alpha} \otimes v)(\hat{\sigma}(v)) \quad (\text{双対作用の定義 (i)}) \\ &= \sum_i \alpha(f_i) \otimes v_i \qquad \in S \otimes_k S \otimes_k V'\end{aligned}$$

となるが，f_i は線型独立であるから，$\hat{\sigma}(v_i) \in S \otimes_k V'$ であることが従う[*25]． ■

定義 2.7（簡約，線型簡約） 代数群 G は，その radical がトーラスになるとき**簡約代数群 (reductive algebraic group)** であるという．また，G の任意の表現が完全可約であるとき**線型簡約 (linearly reductive)** であるという． □

例 2.8 半単純代数群は線形簡約であることが証明できる．これによって，$\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ などの基本的な線形代数群が線形簡約であることが従う． □

G が線型簡約であるとする．このとき，G の表現 $\sigma : G \times \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ は，既約表現の直積

$$\mathbb{A}^{n_1} \times \mathbb{A}^{n_2} \times \cdots \times \mathbb{A}^{n_m}$$

に分解する．適当に並び替えることで，$\mathbb{A}^{n_1}, \ldots, \mathbb{A}^{n_t}$ は $n_1 = \cdots = n_t = 1$ で，作用が自明なもの（すなわち自明表現），$\mathbb{A}^{n_{t+1}}, \ldots, \mathbb{A}^{n_m}$ は非自明な表現であるとしてよい．このとき，表現 $\mathbb{A}^n$ の部分空間

$$\mathbb{A}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{A}^{n_t} \times (0) \times \cdots \times (0) \subset \mathbb{A}^n$$

には G が自明に作用し，他の G が自明に作用する部分空間は全てこの部分空間に含まれている．このような部分空間への射影は非常に重要な写像である．実際，双対作用で見てもこのような写像は重要である：

定義 2.9（Reynolds 作用素） G を線型簡約な代数群，$S = \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$，$\hat{\sigma}$ を G の V への双対作用とする．このとき，線型写像 $E : V \to V$ であって，次の 3 条件を満たすものを **Reynolds 作用素 (Reynolds operator)** という．

(i) E は $\hat{\sigma}$ と可換である．すなわち，$\hat{\sigma} \circ E = (1_S \otimes E) \circ \hat{\sigma}$ となる．
(ii) $E^2 = E$ が成り立つ．
(iii) $E(x) = x$ となる必要十分条件は $x \in V$ が G 不変，すなわち $\hat{\sigma}(x) = 1 \otimes x$ となることである． □

注意 2.10 V が有限次元の場合，線型簡約であることの定義及び注意 2.3 から，自明な表現への射影に対応するベクトル空間 V の写像をとることで，Reynolds 作用素 E が一意に存在することがわかる．一般の場合にも補題 2.6 を用いることで，線型簡約代数群 G の双対作用をもつベクトル空間 V は有限次既約表現の直和に分解するから，各成分での Reynolds 作用素の直和をとることで V の Reynolds 作用素を得ることができる． □

注意 2.11 G を線型簡約代数群，$G = \operatorname{Spec} S$，$\hat{\sigma}_1 : V_1 \to S \otimes_k V_1$，$\hat{\sigma}_2 : V_2 \to S \otimes_k V_2$ をそれぞれ V_1, V_2 への双対作用，E_1, E_2 をそれぞれに対する Reynolds 作用素とする．このとき，双対作用と可換になるような線型写像 $\phi : V_1 \to V_2$ に対して，$\phi \circ E_1 = E_2 \circ \phi$ が成り立つ． □

[*25] この証明は Mumford の本 [GIT] の証明ではなく，向井先生の本 [Mu03] における証明である．こちらの方が断然スマートだったので，書き換えることにした．

証明　補題 2.6 より，V_1 は有限次元で $\phi(V_1) = V_2$ であるとしてよい．V_1 の既約表現への分解を

$$V_1 = V_1^G \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$$

と表す．Schur の補題により，$\phi(W_i) \simeq W_i$ または $\phi(W_i) = 0$ が成り立つ．したがって，$\phi(V_1^G) = V_2^G$ である．したがって，$\phi \circ E_1 = E_2 \circ \phi$ を得る．■

注意 2.12　線型簡約代数群 G が双対作用する環を R，そのときの Reynolds 作用素を $E : R \to R$ とする．Reynolds 作用素は一般に環準同型であるとは限らないことに注意しよう．しかし，次のようなことは証明することができる．R_0 を G の双対作用の不変元のなす部分環とし，$R_1 := \mathrm{Ker}\, E \subset R$ と定める．Reynolds 作用素の定義の (iii) から，$E : R \to R_0$ は全射であり，ベクトル空間としての同型 $R \simeq R_0 \oplus R_1$ がとれる．

$R_0 \cdot R_1 \subset R_1$，すなわち R_1 は R_0 加群であることを示す．Reynolds 作用素の定義の (ii) より，$(1 \otimes E)(\hat{\sigma}(R_1)) = \hat{\sigma}(E(R_1)) = 0$ より，$\hat{\sigma}(R_1) \subset S \otimes_k R_1$ であるから，R_1 は R の G 不変な部分空間である．$g \in R_0$ と $v \in R_1$ を任意にとる．$V \subset R_1$ を v を含む有限次元の既約表現とする．g は G 不変なので，$v' \in V$ に対して

$$\hat{\sigma}(g \cdot v') = \hat{\sigma}(g) \cdot \hat{\sigma}(v') = (1 \otimes g) \cdot \hat{\sigma}(v')$$

となるので，次の図式が可換である：

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[d, "g\cdot"'] & S \otimes_k V \arrow[d, "(1\otimes g)\cdot"] \\
g \cdot V \arrow[r, "\hat{\sigma}"'] & S \otimes_k g \cdot V
\end{tikzcd}$$

すなわち，g 倍写像 $V \to g \cdot V$ は G 同変な準同型である．したがって，注意 2.11 によって，$E(g \cdot V) = g \cdot E(V) = 0$ であり，$g \cdot V \subset R_1$ を得る．

以上から，$R_0 \cdot R_1 \subset R_1$ であることが分かった．

$x \in R$ と $y \in R_0$ に対して，

$$\begin{aligned} E(x \cdot y) &= E((x - E(x) + E(x)) \cdot y) \\ &= E((x - E(x)) \cdot y) + E(E(x) \cdot y) \end{aligned}$$

である．ここで，$x - E(x) \in R_1$ より $(x - E(x)) \cdot y \in R_1$ であるから $E((x - E(x)) \cdot y) = 0$ であり，$E(x) \cdot y \in R_0$ より $E(E(x) \cdot y) = E(x) \cdot y$ であるから，結果的に等式

$$E(x \cdot y) = E(x) \cdot y \quad (x \in R,\ y \in R_0)$$

を得る．これを **Reynolds 等式**と呼ぶ．Reynolds 等式によって，Reynolds 作用素 $E : R \to R_0$ は R_0 加群の準同型であり，同型 $R \simeq R_0 \oplus R_1$ は R_0 加群としての同型であることがわかった．□

注意 2.13　線型簡約な代数群の分類は，永田雅宜氏によって次のように与えられた：

(a) 標数 $p\ (> 0)$ において，線型簡約代数群は単位元を含む連結成分 G_0 が代数的トーラス $(\mathbb{G}_m)^r$ であり，G/G_0 は位数が p と互いに素な有限群である[*26]．

(b) 標数が 0 の場合，G が線型簡約であることと G が簡約であることは同値である．また，このとき G_0 は代数的トーラス T と半単純代数群 G_0' の直積群と isogenous[*27]であり，G_0' は G の commutator

[*26] G_0 が部分群になることは G_0 の定義から，及び G/G_0 が有限群になることは G の準コンパクト性から当たり前である．

[*27] kernel が有限群となるような surjective morphism が存在することである．

subgroup として取ることができる．

この注意 2.13 により，標数 0 の場合ならば簡約代数群 G の双対作用に関しても，Reynolds 作用素を取ることができる．