2.2 The affine case

定理 2.14 X を k 上のアフィンスキーム，G を簡約代数群，$\sigma : G \times X \to X$ を G の X への作用とする．このとき，X の G 作用による uniform categorical quotient (Y, ϕ) が存在して，Y はアフィンスキーム，ϕ は universally submersive になる．さらに，X が代数的スキームならば Y も代数的スキームである．

加えて k の標数が 0 であるとき，(Y, ϕ) は universal categorical quotient であり，さらに X が Noether ならば Y も Noether になる． □

ここでは標数が 0 の場合にのみ証明を与える．証明には次の代数学の補題を用いる．

補題 2.15 R を G が $\hat{\sigma} : R \to S \otimes_k G$ によって双対に作用する環，$R_0 \subset R$ を G 作用の不変式環とする．このとき，次が成り立つ．

(i) S_0 を R_0 代数とする．このとき，S_0 は $S_0 \otimes_{R_0} R$ の不変式環になる．

(ii) $\{\mathfrak{a}_i\}_i$ を invariant ideal の族としたとき，

$$\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right) \cap R_0 = \sum_{i \in I} (\mathfrak{a}_i \cap R_0)$$

が成り立つ．

(iii) $\mathfrak{a} \subset R$ を invariant ideal としたとき，$R_0/\mathfrak{a} \cap R_0$ は $R/\mathfrak{a}$ の不変式のなす部分環である． □

証明 (i) を示す．標数が 0 なので，簡約代数群 G は線型簡約でもあり，したがって Reynolds 作用素が存在する．$E : R \to R$ を Reynolds 作用素とし，$R_1 := \operatorname{Ker} E$ とする．このとき，R_0 加群としての同型 $R \simeq R_0 \oplus R_1$ により，$R \otimes_{R_0} S_0 \simeq S_0 \oplus (R_1 \otimes_{R_0} S_0)$ であり，特に S_0 は $R \otimes_{R_0} S_0$ の部分環である．$R \otimes_{R_0} S_0$ への G の双対作用

$$\hat{\sigma}' : R \otimes_{R_0} S_0 \to S \otimes_k (R \otimes_{R_0} S_0)$$

は，$\hat{\sigma}'(a \times b) = \hat{\sigma}(a) \otimes b$ で与えられているので，$1 \otimes b$ の形の元は不変元であることに注意する．

$\sum a_i \otimes b_i \in R \otimes_{R_0} S_0 \quad (a_i \in R, b_i \in S_0)$ を不変元とする．$R \otimes_{R_0} S_0$ の Reynolds 作用素も E で表すことにすると．

$$\begin{aligned}
\sum a_i \otimes b_i &= E\left(\sum (a_i \otimes 1) \cdot (1 \otimes b_i)\right) \\
&= \sum E(a_i \otimes 1) \cdot (1 \otimes b_i) \quad \text{(Reynolds 等式より)} \\
&= \sum E a_i \otimes b_i \\
&= 1 \otimes \sum E a_i \cdot b_i \in S_0
\end{aligned}$$

となる．これで (i) が示された．

次に，(ii) の主張を示す．$\supset$ の向きの包含関係は明らか．$\subset$ を示す．$\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ を R の invariant ideal の族とする．$f \in (\sum \mathfrak{a}_i) \cap R_0$ をとる．このとき，$f_i \in \mathfrak{a}_i$ に対して $f = \sum_i f_i$ と書ける（有限個を除いて $f_i = 0$ である）．このとき，

$$f = Ef = \sum_{i \in I} E f_i \in \sum_{i \in I} (\mathfrak{a}_i \cap R_0)$$

となる．

最後に，(iii) の主張を示す．$E: R \to R$ を R の Reynolds 作用素，$\bar{E}: R/\mathfrak{a} \to R/\mathfrak{a}$ を $R/\mathfrak{a}$ の Reynolds 作用素とする．図式

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "E"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R \arrow[d] \\ R/\mathfrak{a} \arrow[r, "\bar{E}"'] & R/\mathfrak{a} \end{tikzcd}$$

の可換性より，$f \in R$ に対して $\bar{f} \in R/\mathfrak{a}$ が invariant であるとすると，$\overline{Ef} = \bar{E}\bar{f} = \bar{f}$ が成り立つ．$Ef \in R_0$ であるから，$R/\mathfrak{a}$ の invariant な元は全て R_0 の像になっている． ■

証明（定理 2.14 の証明） $X = \operatorname{Spec} R$ とすると，G は R への双対作用を持つ．$R_0 \subset R$ をこの双対作用に関する invariant の環とし，$Y = \operatorname{Spec} R_0$ とおき，$\phi: X \to Y$ を環の埋め込みに対応する射とする．補題 2.15 の (i) より，任意のアフィン開集合 $U \subset Y$ に関して $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \subset \Gamma(U, \phi_* \mathcal{O}_X)$ は invariant からなる部分環となるから，$\mathcal{O}_Y$ は $\phi_* \mathcal{O}_X$ の invariant section からなる部分層である．

一方，補題 2.15 の (ii) より，invariant closed subset の族 $W_i \subset X$ に対して，

$$\overline{\phi\left(\bigcap_i W_i\right)} = \bigcap_i \left(\overline{\phi(W_i)}\right)$$

が成り立つ．特に，W_1 を invariant closed subset，W_2 を閉点 $y \in Y$ に関して $W_2 = \phi^{-1}(y)$ と定めることで，$\phi(W_1)$ が閉集合であることが分かる．実際，

$$\begin{aligned} y \in \phi(W_1) &\Leftrightarrow \phi(W_1 \cap W_2) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \overline{\phi(W_1 \cap W_2)} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \overline{\phi(W_1)} \cap \{y\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow y \in \overline{\phi(W_1)} \end{aligned}$$

である．以上から各 $\phi(W_i)$ は全て閉集合であるから，最初の等式は

$$\phi\left(\bigcap_i W_i\right) = \bigcap_i (\phi(W_i))$$

となる．$\phi \circ \sigma = \phi \circ p_2$ は明らかだから，注意 1.27 より Y は categorical quotient で ϕ は submersive である．また，注意 1.26 (ii) および補題 2.15 (i) より universal であることも明らかである．

主張の後半を示そう．X が Noether であるとする．$\mathfrak{a} \subset R_0$ をイデアルとしたとき，補題 2.15 (i) を $S_0 = R_0/\mathfrak{a}$ に用いることで，$R_0/\mathfrak{a}$ は $(R_0/\mathfrak{a}) \otimes_{R_0} R$ の不変式環であることが分かる．同型 $(R_0/\mathfrak{a}) \otimes_{R_0} R \simeq R/R \cdot \mathfrak{a}$ において，右辺の不変式環は補題 2.15 (iii) より $R_0/(R \cdot \mathfrak{a} \cap R_0)$ であるので，結果として R_0 のイデアルの一致

$$(R \cdot \mathfrak{a}) \cap R_0 = \mathfrak{a}$$

を得る．よって，R の a.c.c. は R_0 の a.c.c. を導く．よって Y も Noether である．

X が k 上有限型であるときを考えよう．まず，R が k 上の次数付き環で，G の R への作用が次数を保っていると仮定する．このとき R_0 は R の部分次数付き環で，よって R が k 上有限型であるとき，補題 7.1 によって R_0 も k 上有限型であることが従う[*28]．

[*28] ここは Mumford の証明と若干ことなるアプローチをとった．

次に，一般の場合を R が次数付き環の場合に帰着させよう．有限次元の不変部分空間 $V \subset R$ で，R の生成元を含んでいるようなものをとり，$R' = \mathrm{Sym}(V)$ とおく．このとき，R' の invariant のなす部分環 R'_0 は，次数付き環の場合の議論から有限型である．自然な掛け算写像 $m : R' \to R$ は，V が R の生成元を含んでいることから全射である．G の V への作用は次数を保つ G の R' への作用を導く．この作用は，R とその G からの作用と可換である．特に，イデアル $\mathrm{Ker}\, m \subset R'$ は G 不変である．$\mathfrak{a} := \mathrm{Ker}\, m$ として補題 2.15 (iii) を用いると，全射 $m : R'_0 \to R_0$ が存在することがわかる．R'_0 が有限型であることから，R_0 が有限型であることが従う．以上で定理 2.14 の主張は全て示された． ■

系 2.16　X を k 上のアフィンスキーム，G を簡約代数群とし，G が X に作用しているものとする．$W_1 \subset X$ および $W_2 \subset X$ を非交な G 不変閉集合とする．このとき，不変な元 $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ で，W_1 上では 0，W_2 上では 1 であるもので W_1 と W_2 は分離できる． □

証明　$\mathfrak{a}_i$ を W_i に対応する invariant ideal とする．補題 2.15 (ii) より，

$$1 \in (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \cap R_0 = \mathfrak{a}_1 \cap R_0 + \mathfrak{a}_2 \cap R_0$$

となるから，$f \in \mathfrak{a}_1 \cap R_0$ と $g \in \mathfrak{a}_2 \cap R_0$ が存在して $1 = f + g$ と書ける．この f が求めるものである． ■

注意 2.17　この系は簡約代数群 G の，ほぼ唯一と言ってもよい，重要な幾何学的性質である[*29]． □

アフィンスキームへの作用が閉作用である場合には，よい商が得られる：

定理 2.18　定理 2.14 と同じ仮定の下で，(Y, ϕ) が X の G による geometric quotient であるための必要十分条件は，G から X への作用が閉であることである．さらに，標数 0 の下では (Y, ϕ) は自動的に universal geometric quotient になる． □

証明　(Y, ϕ) が geometric quotient であるとき，補題 1.37 より σ は閉作用である．

逆に，σ が閉作用であるとしよう．$\Psi(G \times X)$ が $X \times_Y X$ の真の部分集合であると仮定する．このとき，適当な代数閉体 Ω [*30]と幾何学的点 $x_1, x_2 : \mathrm{Spec}\,\Omega \to X$ であり，$\phi(x_1) = \phi(x_2)$ であるが，$O(x_1) \cap O(x_2) = \emptyset$ in $\overline{X} := X \times_k \mathrm{Spec}\,\Omega$ となるものが存在する．しかし，σ が閉作用であることから，$O(x_1), O(x_2)$ は $\overline{X}$ の非交な G 不変閉集合だから，系 2.16 より G 不変な切断 $f \in \Gamma(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \otimes_k \Omega$ [*31]が存在して $f(x_1) = 0$ かつ $f(x_2) = 1$ となる．$R = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ の G 不変式環を R_0 としたとき，基底変換をとっただけだから $\Gamma(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = R \otimes_k \Omega$ の $\overline{G} := G \times_k \mathrm{Spec}\,\Omega$ の作用による不変式環は $R_0 \otimes_k \Omega$ で与えられている． 従って，不変な切断 $f \in R_0$ で $f(x_1) \neq f(x_2)$ となるようなものが存在するが，このとき次の図式の可換性から

[*29] と，Mumford 先生はおっしゃっている．このノートを書いた人間は貧弱なので，簡約代数群の一般論には全く詳しくない．

[*30] 代数的スキームではない場合には Hilbert の零点定理が一般には成り立たないので，閉点の剰余体が基礎体 k の超越拡大になりうる．従って，単に代数閉包 $\bar{k}$ を取るだけでは不足になる可能性がある．

[*31] 等号は，Ω/k が平坦であることから，flat base change formula より従う．

$\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$ となるので矛盾である．

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}\Omega \arrow[dr, "x_i"] \arrow[drr, bend left, "f(x_i)"] \arrow[ddr, bend right, "\phi(x_i)"'] & & \\
& X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"] & \mathbb{A}^1 \\
& Y \arrow[ur, "\text{univ. prop. of cat. quot.}"'] &
\end{tikzcd}
$$

したがって，geometric quotient の定義の (ii) が確認できた．(Y, ϕ) の構成から，他の条件 (i), (iv) は従っている．また，定理 2.14 によって ϕ は (universally) submersive である．よって，定義の条件全てが確かめられたので (Y, ϕ) は geometric quotient である．

また，標数が 0 の場合，定理 2.14 から (Y, ϕ) は universally submersive な universal categorical quotient であり，既に geometric quotient であることから Ψ の像は $X \times_Y X$ であるので，注意 1.22 によって universal geometric quotient であることが従う． ■

逆に，アフィンスキームへの作用が閉作用でない場合に categorical quotient をとったとしても，あまりよい商は得られない：

例 2.19 実は，定理 2.14 のようにして作った categorical quotient は，定理 2.18 のように作用が閉作用でない場合，軌道のパラーメータ空間とは程遠いものになる．

例えば，$k = \bar{k}$ のとき，$\mathbb{A}_k^n := \operatorname{Spec} k[X_1, \dots, X_n]$ への $\mathbb{G}_m$ の作用を，$\alpha \in \mathbb{G}_m(k)$ と $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}_k^n(k)$ に対して $\alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ というように定める．この作用は閉作用ではない．このとき，不変式環は k なので categorical quotient は $\operatorname{Spec} k$ であるが，これは軌道のパラメータ空間とは全く違う何かである．

作用を $\mathbb{A}_k^n \setminus \{0\}$ に制限して考えれば閉作用である．$n = 1$ のときは $\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\} = \operatorname{Spec} k[X, \frac{1}{X}]$ であり，不変式環は k なので，$\mathbb{G}_m$ による $\mathbb{A}_k^1 \setminus \{0\}$ の geometric quotient は $\mathbb{P}_k^0 = \operatorname{Spec} k$ である．$n \geq 2$ の場合には $\mathbb{A}_k^n$ が正規であることから $\mathbb{A}_k^n \setminus \{0\}$ はアフィンではないので，この節で扱った枠組みでは捉えられない． □

従って，例えはじめはアフィンスキームへの作用を考えていたとしても，よい商を得るには上の例における原点 0 のような "悪い軌道" を除外して考えなければならず，そのようなとき "悪い軌道" を除外して得たスキームは一般には最早アフィンではない．従って，群が作用している空間がアフィンスキームでない場合の商の構成，および軌道の "よい・悪い" の厳密な定義をすることが必要になる[*32]．これを行ったのが Mumford の Geometric Invarinat Theory である．

[*32] このように悪い軌道を除外して軌道のパラメータ空間と呼ぶに相応しい商を構成することを，俗に **GIT 商 (GIT quotient)** をとるという．しかし，これは広い意味で使われることが多く，一口に GIT 商をとると言っても，それが意味するところは人と文脈によって若干異なる場合がある．