2.3 Linearization of an invertible sheaf

簡約代数群 G の，任意の代数的スキーム X への作用を考える前に，G の X への作用と X 上の可逆層 L の関係を調べておく．

定義 2.20（G-Linearization） G, X, L, σ をそれぞれ代数群，代数的群スキーム，X 上の可逆層，G の X への作用とする．このとき，$G \times X$ 上の層の同型

$$\phi : \sigma^* L \xrightarrow{\sim} p_2^* L$$

であって，次の cocycle 条件 (*) を満たすものを，L の G **線型化 (G-linearization)** という．

(*) $\mu : G \times G \to G$ を群の積演算とする．$p_{23}, \mu \times 1_X, 1_G \times \sigma : G \times G \times X \to G \times X$ に関して，条件は図式

$$\begin{tikzcd}
(\sigma \circ (1_G \times \sigma))^* L \arrow[rr, "(1_G \times \sigma)^* \phi"] \arrow[dd, equal] & & (p_2 \circ (1_G \times \sigma))^* L \arrow[dl, equal] \\
& (\sigma \circ p_{23})^* L \arrow[r, "p_{23}^* \phi"'] & (p_2 \circ p_{23})^* L \arrow[d, equal] \\
(\sigma \circ (\mu \times 1_X))^* L \arrow[rr, "(\mu \times 1_X)^* \phi"] & & (p_2 \circ (\mu \times 1_X))^* L
\end{tikzcd}$$

が可換になることである． □

G-linearization という概念を理解するために，以下で若干の解説を試みる．簡単のため，基礎体 k は代数的閉体であるとし，$G(k)$ を G の幾何学的点（この場合は単に閉点）のなす群とする．このとき，任意の $\alpha \in G(k)$ に対して，G-linearization を与える写像 ϕ を $\{\alpha\} \times X \subset G \times X$ に制限して考える．$T_\alpha : X \to X$ を $x \mapsto \sigma(\alpha, x)$ で与えられる X の自己同型写像とたとき，ϕ の $X = \{\alpha\} \times X \subset G \times X$ への制限は，同型 $\phi_\alpha : T_\alpha^* L \xrightarrow{\sim} L$ で与えられる．cocycle 条件によって，次の図式の可換性 $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ T_\beta^* \phi_\alpha$

$$\begin{tikzcd}
T_{\alpha\beta}^* L \arrow[rr, "\phi_{\alpha\beta}"'] \arrow[dr, "T_\beta^* \phi_\alpha"'] & & L \\
& T_\beta^* L \arrow[ur, "\phi_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

が任意の $\alpha, \beta \in G(k)$ に対して従う．

G-linearization を理解するための他の方法として，直線束 L を層としてではなく幾何学的直線束[*33] $\mathbf{L} := \mathbb{V}(L) := \operatorname{Spec}_X \operatorname{Sym}(L)$ であると思って定義の条件の意味を考えてみよう．$\pi : \mathbf{L} \to X$ を射影とする．このとき，

$$\begin{tikzcd}
\sigma^* \mathbf{L} := (G \times X) \times_X \mathbf{L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{L} \arrow[d, "\pi"] \\
G \times X \arrow[r, "\sigma"'] & X
\end{tikzcd}$$

*33 [Ha77, Chap.II, Exercise 5.18] または [Go10, Chap. 11] を見よ．

および

$$\begin{tikzcd}
p_2^*\mathbf{L} := (G \times X) \times_X \mathbf{L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{L} \arrow[d, "\pi"] \\
G \times X \arrow[r, "p_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

によって $G \times X$ 上の直線束 $\sigma^*\mathbf{L}$ および $p_2^*\mathbf{L}$ を定義することにすると，G-linearization は $G \times X$ 上の直線束の同型

$$\sigma^*\mathbf{L} \underset{\Phi}{\overset{\sim}{\longleftarrow}} p_2^*\mathbf{L}$$

のことである[*34]．同型 $p_2^*\mathbf{L} = (G \times X) \times_X \mathbf{L} \simeq G \times \mathbf{L}$ などによる同一視の元で，$\Sigma := p_2 \circ \Phi : G \times \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ と定めると，図式

$$\begin{tikzcd}
G \times \mathbf{L} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "1_G \times \pi"'] & \mathbf{L} \arrow[d, "\pi"] \\
G \times X \arrow[r, "\sigma"] & X
\end{tikzcd}$$

が可換になり，Σ が $G \times X$ の直線束 $G \times \mathbf{L}$ と X 上の直線束 $\mathbf{L}$ のバンドル同型を与えていることが分かる．このとき，可逆層を考えていたときの cocycle 条件は次の図式の可換性のことであると読み替えられる．

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times \mathbf{L} \arrow[rrr, "\mu \times 1_{\mathbf{L}}"] \arrow[dr, "1_G \times \Sigma"] \arrow[ddd] & & & G \times \mathbf{L} \arrow[dl, "\Sigma"'] \arrow[ddd] \\
& G \times \mathbf{L} \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d] & \mathbf{L} \arrow[d] & \\
& G \times X \arrow[r, "\sigma"'] & X & \\
G \times G \times X \arrow[rrr, "\mu \times 1_X"] \arrow[ur, "1_G \times \sigma"'] & & & G \times X \arrow[ul, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

例えば，$X = \operatorname{Spec} k$，$L = \mathcal{O}_X = k$ のとき，$\mathbf{L} = \mathbb{A}_k^1$ である．このとき，$\operatorname{Aut}_k(\mathbb{A}_k^1) = \mathbb{G}_m$ であるから，$\mathbf{L}$ の G-linearization とは G の指標 $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ のことに他ならない．指標 χ が与える G の $\mathbb{A}_k^1$ への作用 $\Sigma : G \times \mathbb{A}_k^1 \to \mathbb{A}_k^1$ は，具体的に書き下すと次のようになる．

$$\Sigma(\alpha, z) = \chi(\alpha) \cdot z \quad (\alpha \in G(k),\ z \in \mathbb{A}_k^1(k))$$

一方で，可逆層の側でみると，$\chi : G \to \mathbb{G}_m$ に同型 $\operatorname{Hom}(G, \mathbb{G}_m) \simeq \Gamma(G, \mathcal{O}_G^*)$ で対応する切断を $\bar{\chi} \in \Gamma(G, \mathcal{O}_G^*)$ としたとき，G-linearization を与える写像は

$$\phi : \mathcal{O}_G \to \mathcal{O}_G, \quad \phi(f) = \bar{\chi}^{-1} \cdot f$$

で与えられる．（逆元 $\bar{\chi}^{-1}$ が出てくるのは，局所自由層の圏と幾何学的ベクトル束の圏が反変圏同値であることに起因している．）

[*34] 局所自由層から幾何学的ベクトル束を作る操作 $\mathcal{E} \mapsto \mathbb{V}(\mathcal{E})$ は反変関手である．またこのとき，$\pi : \mathbf{L} \to X$ の $x \in X(k)$ における幾何学的ファイバー $\mathbf{L}(x)$ の幾何学的点全体と自然に同一視できるのは，L の双対直線束 L^* の $x \in X$ におけるファイバー $L^*(x) := L^* \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x)$ である．よく勘違いしてひっくり返しに覚えてしまうところなので注意されたい．

L の G-linearization から誘導される作用は他にもいくつかあるが，後々重要になってくるのは，次のようにして定まる G の $H^0(X,L)$ への双対作用である：双対作用は次の写像の合成で定まる．（最後の同型は Künneth formula である．）

$$H^0(X,L) \xrightarrow{\sigma^*} H^0(G\times X, \sigma^*L) \xrightarrow{\phi} H^0(G\times X, p_2^*L) \simeq H^0(G,\mathcal{O}_G)\otimes H^0(X,L)$$

双対作用の定義の条件は，G-linearization の cocycle 条件から従う．この双対作用による不変元を L の **invariant section** と呼ぶ．

二つの G-linearization をもつ可逆層のテンソル積は再び標準的に G-linearization をもつ，すなわち，G-linearization をひとつ決めた X 上の可逆層たちのなす集合 $\mathrm{Pic}^G(X)$ はテンソル積によってアーベル群の構造をもつ．さらに，G の作用をもつスキームの間の G 線型射 $f: X\to Y$ に対しては，群準同型 $f^*: \mathrm{Pic}(Y)^G \to \mathrm{Pic}^G(X)$ が定まる．G が Y に自明に作用している場合には，Y 上の任意の可逆層は自明な G-linearization をもつので，準同型は $f^*: \mathrm{Pic}(Y)\to \mathrm{Pic}^G(X)$ となる．(Y,f) が X の G による geometric quotient で，G の X への作用が自由である場合には，命題 1.42 と SGA1, Chap.VIII の descent より，$\mathrm{Pic}^G(X)$ と $\mathrm{Pic}(Y)$ は同型である．

例 2.21　G-linearization の面白い例の一つとして，$\mathrm{PGL}(n+1)$ の射影空間 $\mathbb{P}^n$ への作用による，$\mathbb{P}^n$ 上の可逆層の $\mathrm{PGL}(n+1)$-linearization の例を見よう．$\mathrm{PGL}(n+1)$ は

$$\mathbb{P}^{n^2+2n} := \mathrm{Proj}\, k[a_{00},\dots,a_{0n}; a_{10},\dots,a_{1n};\dots;a_{n0},\dots,a_{nn}]$$

の $\det((a_{ij})_{i,j}) \neq 0$ で与えられる開集合であるとし，$\mathbb{P}^n := \mathrm{Proj}\, k[X_0,\dots,X_n]$ とする．このとき，作用 $\sigma: \mathrm{PGL}(n+1)\times\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ は，

$$\sigma^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \simeq p_1^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n^2+2n}}(1))\otimes p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$$
$$\sigma^*(X_i) = \sum_{j=0}^{n} p_1^*(a_{ij})\otimes p_2^*(X_j)$$

を満たすように定めることができる．しかし，残念ながら $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n^2+2n}}(1)$ は $\mathrm{PGL}(n+1)$ の上で自明な可逆層ではない．実際，この可逆層の群 $\mathrm{Pic}(\mathrm{PGL}(n+1))$ における位数は $n+1$ である．従って，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ は $\mathrm{PGL}(n+1)$-linearization を持たない．

次に，$\mathrm{PGL}(n+1)$-linearization を持つような例を見る．$\mathbf{L}$ を $\mathbb{P}^n$ 上の $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ に対応する幾何学的直線束とする（よく普遍直線束と呼ばれているものである）．よく知られているように，$\mathbf{\Omega}_{\mathbb{P}^n}$ を $\mathbb{P}^n$ 上の余接束としたとき，同型 $\bigwedge^n \mathbf{\Omega}_{\mathbb{P}^n} \simeq \mathbf{L}^{n+1}$ が成り立つ．$\mathbb{P}^n$ への任意の作用は余接束への作用に持ち上がるので，すなわち $\mathbf{L}^{n+1}$ にも作用が入る．つまり，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n+1)$ は $\mathrm{PGL}(n+1)$-linearization を持つ．

一方で，標準的な isogeny（すなわち核が有限群となるような全射準同型）$\bar{\omega}: \mathrm{SL}(n+1)\to\mathrm{PGL}(n+1)$ と，これが誘導する作用 $\tau := \sigma\circ(\bar{\omega}\times 1_{\mathbb{P}^n})$ を考える．このとき，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ は $\mathrm{SL}(n+1)$-linearization を持つ．以下でこのことを見よう．$\mathrm{SL}(n+1)$ は $\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}$ に作用していて，従って射影

$$\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n$$

は $\mathrm{SL}(n+1)$ 線型射である．しかし，$\mathbf{L}$ は $\mathbb{A}^n$ の 0 における一点爆発で得られていて，$\mathbf{L}$ から $\mathbb{P}^n$ への射影が π で与えられているから，$\mathrm{SL}(n+1)$ の $\mathbb{P}^n$ への作用は $\mathbf{L}$ への作用に持ち上がる．よって，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ は $\mathrm{SL}(n+1)$-linearization を持つ．　□

以下では，G-linearization の一般的な性質について論じる．

命題 2.22　連結な代数群 G が代数的スキーム X に作用しているとする．$\overline{G}$ から $\overline{\mathbb{G}_m}$ には非自明な準同型写像がなく，X は幾何的被約であると仮定する．このとき，X 上の任意の可逆層 L は高々一つの G-linearization をもつ． □

例 2.23　代数群の表現の最高ウエイト理論から，複素数体上の特殊線型群 $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ や特殊直交群 $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$，シンプレクティック群 $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ は非自明な 1 次元表現を持たない．これについては，あまり広く読まれている文献ではないかもしれないが，このノートの著者は [岡田] 問 4.1. で勉強した．さらに，より一般に半単純群は非自明な 1 次元表現を持たないことが分かる． □

証明（命題 2.22 の証明）　可逆層 L が相異なる二つの G-linearization をもったとする．このとき，基礎体を代数閉体に基底変換したときにも，$\bar{L}$ は相異なる二つの G-linearization を持つ．従って，基礎体 k は代数的閉であるとし，X は k 上の被約なスキームであるとしてよい．また，G が連結であることから，G は X の各連結成分それぞれに独立に作用している．従って，X は連結であるとして考えて差し支えない．

G-linearization を忘却する写像 $\mathrm{Pic}^G(X) \to \mathrm{Pic}(X)$ が単射であることを証明すればよい．これは群準同型であるから，$\mathcal{O}_X$ が非自明な G-linearization を持たないことを示せばよい．$\phi : \sigma^*\mathcal{O}_X \to p_2^*\mathcal{O}_X$ を G-linearization とする．$\sigma^*\mathcal{O}_X \simeq p_2^*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{O}_{G\times X}$ であるから，ϕ は $H^0(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\phi^*} H^0(\mathcal{O}_{G\times X})$ を定める．$f := \phi^*(1)$ とすると，ϕ が同型であることから $f \in H^0(\mathcal{O}^*_{G\times X})$ である．また，cocycle 条件から，$\{e\}\times X$ 上では f は 1 になることも分かる．Rosenlicht の定理（補題 7.3，補題 7.5）から，$H^0(\mathcal{O}^*_{G\times X})$ は $H^0(\mathcal{O}^*_G)$ と $H^0(\mathcal{O}^*_X)$ の像で生成され，かつ $H^0(\mathcal{O}^*_G) \simeq k^*$ であることが従う．よって，

$$H^0(\mathcal{O}^*_X) \xrightarrow[p_2]{\sim} H^0(\mathcal{O}^*_{G\times X})$$

である．これによって，埋め込み $i : \{e\}\times X \to G\times X$ に関して，$i^* : H^0(\mathcal{O}^*_{G\times X}) \to H^0(\mathcal{O}^*_X)$ も同型であるから，$\{e\}\times X$ 上で 1 である f は $G\times X$ 上でも 1 であり，よって ϕ は identity である．

$$\begin{tikzcd} X = \{e\}\times X \arrow[r, "i"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}"] & G\times X \arrow[r, "p_2"'] & X \end{tikzcd}$$

よって，示された． ■

命題 2.24　連結な代数群 G が k 上固有な代数多様体 X に作用しているとする．L を X 上の可逆層であるとして，λ を L によって定まる Picard スキーム $\mathrm{Pic}(X/k)$ の k 有理点を λ とする．このとき，各 n に対して，L^n が G-linearizable であるための必要十分条件は $n\lambda$ が G による左固定点であることである． □

証明　G-linearization が入れば固定点なのは明らか．逆に，$n\lambda$ が G 作用による左固定点であるとしよう．まず，ある m が存在して σ^*L^{mn} と $p_2^*L^{mn}$ が同型であることを示す．次の see-saw 完全列を考える：

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{O}^*_G) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}^*_{G\times X}) \longrightarrow H^0(G, R^1p_{1*}(\mathcal{O}^*_{G\times X})).$$

Chevalley の定理（定理 7.12）より $H^1(\mathcal{O}^*_G) \simeq \mathrm{Pic}(G)$ [*35] は有限群なので特に任意の元の位数が有限であることから，$\sigma^*(L^n) \otimes p_2^*(L^n)^{-1}$ の $H^0(G, R^1p_{1*}(\mathcal{O}^*_{G\times X}))$ における像が 0 であることを示せば良い．ここで，

[*35] この同型は [Ha77] Chap.III, Exercise 4.5. を見よ．

Picard スキーム $\mathrm{Pic}(X/k)$ の関手的定義から，

$$H^0(G, R^1 p_{1*}(\mathcal{O}^*_{G\times X})) \subset \mathrm{Hom}_k(G, \mathrm{Pic}(X/k))$$

である．X が固有な代数多様体であることから $H^0(\mathcal{O}_X) \simeq k$ であり，従って命題 2.22 の証明と同じようにして $H^0(\mathcal{O}^*_{G\times X}) \simeq H^0(\mathcal{O}^*_G)$ であり，M を準同型射 $\chi : G \to \mathbb{G}_m$ のなす群とすると，$H^0(\mathcal{O}^*_G) \simeq k^* \times M$ である．*36

系 2.25　G, X, L を命題 2.24 と同じように定める．このとき，$\overline{X}$ が正規多様体なら，任意の n に関して L^n は linearizable である．□

証明　条件の下で，Picard スキーム $\mathrm{Pic}(X/k)$ は k 上固有になり，よって被約な成分は全て Abel 多様体である．従って，定理 7.12 によって有理的である連結代数群 G は，$\mathrm{Pic}(X/k)$ に自明に作用する．■

命題 2.26　X を代数的スキームとして，G を X に作用する代数群とする．また，L を X 上の G-linearization を決めた可逆層で，その切断たちが共通零点を持たないとする．このとき，射 $I : X \to \mathbb{P}^n$ と，G の $\mathbb{P}^n$ への作用，および $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ の G-linearization が存在して，I は G 線型写像であり，L は G-linearized invertible sheaf として $I^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ に同型となる．さらに，X が k 上固有であるならば，I を完備線型系 $H^0(X, L)$ に付随する射としてとることができ，特に L が very ample であるときは，I は埋め込みになる．□

証明　$\phi : \sigma^* L \xrightarrow{\sim} p_2^* L$ を与えられた G-linearization とする．このとき，ϕ は G の $H^0(X, L)$ への双対作用を誘導する．

$V_1 \subset H^0(X, L)$ を有限次元部分ベクトル空間で V_1 に含まれる切断が共通零点を持たないようなものとする．L が very ample のときは，V_1 を対応する射 $X \to \mathbb{P}(V_1)$ が閉埋め込みであるようにとればよく，特に X が k 上固有である場合には $V_1 = H^0(X, L)$ とすればよい．一般の場合に証明する．補題 2.6 によって，V_1 を含むような G 不変部分空間 $V \subset H^0(X, L)$ が取れるので，I をこれに対応する X から $\mathbb{P}(V)$ への射として定める．このとき，定義から $H^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)) = V$ であるから，G は $H^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$ への双対作用をもつ．

次の補題を用いる．

補題 2.27（Tatsuji Kobayasi）　G の $H^0(\mathbb{P}(V), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1))$ への双対作用と，G の $\mathbb{P}(V)$ への作用と $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ の G-linearization の組は，自然に一対一に対応する．

ここでは証明は省略する．この補題を用いることで G の $\mathbb{P}(V)$ への作用と $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)$ への G-linearization が定まる．L の G-linearization との compatibility も対応の仕方から自然に従う．■

この命題のより強いバージョンが次章で必要になる．この命題の主張と証明には次節で定義される記号や次節以降で示される結果が用いられるが，証明が今の命題の証明と関連しているので，ここで紹介することにする．

命題 2.28　L が ample な可逆層であるとしする．このとき，十分大きな N に対して命題 2.26 の G 線型埋め込み I で $L^N \simeq I^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ となるものを，

$$X^{\mathrm{s}}_{(0)} = I^{-1}((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{s}}_{(0)}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)))$$

*36 ここから先の議論が全然わからない．後で考える．

を満たすように選ぶことができる． □

証明 定義から，$X^{\mathrm{s}}_{(0)}(L)$ は有限個の切断 $s_i \in H^0(X, L^{n_i})$ に対してアフィン開集合 X_{s_i} たちで被覆されていて，かつ X_{s_i} への G の作用は 0 次元の stabilizer を持つ．X_{s_i} は有限型なので

$$\Gamma(X_{s_i}, \mathcal{O}_X) = k[f_1^{(i)}, \ldots, f_{m_i}^{(i)}]$$

とおく．s_i をその何回かの積と取り替えることで，次のように仮定してよい：

(i) ある決まった N に対して，$s_i \in H^0(X, L^N)$ である．
(ii) 任意の $1 \leq j \leq m_i$ に対して，$f_j^{(i)} \cdot s_i$ は L^N の切断である．

$$\mathcal{O}_{X_{s_i}} \xrightarrow{f_j^{(i)}} \mathcal{O}_X \xrightarrow{s_i} L^N$$

このとき，前の命題の証明と同じようにして，G 不変な有限次ベクトル空間 $V \subset H^0(X, L^N)$ で，任意の i, j に対して $f_j^{(i)} \cdot s_i \in V$ となるようなものが取れる．$I : X \to \mathbb{P}^n$ を対応する埋め込みとすると，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ の invariant section X_i で $s_i = I^*(X_i)$ となるもの，つまり $X_{s_i} = I^{-1}(\mathbb{P}^n_{X_i})$ となるものが取れる．さらに，(ii) より X_{s_i} は $\mathbb{P}^n_{X_i}$ の閉部分スキームと同型であるから，X_{s_i} の幾何学的点の軌道は $\mathbb{P}^n_{X_i}$ の中でも閉集合である．命題 2.39 と命題の仮定より，$I(X_{s_i})$ の点は $\mathbb{P}^n$ の中で properly stable である．よって，

$$X^{\mathrm{s}}_{(0)} = \bigcup_i X_{s_i} \subset I^{-1}((\mathbb{P}^n)^{\mathrm{s}}_{(0)}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)))$$

となる．逆向きの包含関係は，命題 2.46 より従う． ■