2.4 The general case

さて，一般の代数的スキーム X の群 G による商を考えてみよう．商をとるというのは，G 軌道のパラメータ空間を作るということであった．しかしながら，全ての軌道をパラメータ付けるというのはスキームのカテゴリーでは一般にはできない（例えば例 2.19 を見よ）．従って，何かしらの "よい軌道" だけを予め選んでおいて，その軌道のパラメータ空間を作るというのが妥当な線である[*37]．その "よい軌道" を定めようというのが，次に定義される stability の概念である．

X を代数的スキーム，G を簡約代数群で，$\sigma : G \times X \to X$ で X に作用しているものとする．

定義 2.29（pre-stability, semi-stability, stability） $x \in X$ を X の幾何学的点とする．このとき，

(a) ある x の不変開近傍 $U \subset X$ が存在して，$G \curvearrowright U$ が閉作用になるとき，x は（G の作用 σ に関して）**前安定 (pre-stable)** であるという．

さらに，X 上の直線束とその G 線型化 $\phi : \sigma^* L \xrightarrow{\sim} p_2^* L$ を一つ固定する．

(b) ある n と切断 $s \in H^0(X, L^n)$ で，$s(x) \neq 0$ かつ X_s がアフィン，かつ s が不変（すなわち $\phi_n : \sigma^* L^n \to p_2^* L^n$ について $\phi_n(\sigma^*(s)) = p_2^*(s)$ が成り立つ．）となるようなものが存在するとき，x は**半安定 (semi-stable)** であるという．

(c) ある n と切断 $s \in H^0(X, L^n)$ で，$s(x) \neq 0$ かつ X_s がアフィン，かつ s が不変，さらに作用 $G \curvearrowright X_s$ が閉作用となるようなものが存在するとき，x は**安定 (stable)** であるという．

定義から pre-stable point, semi-stable point, stable point それぞれの十分小さい開近傍に含まれる点は同じ性質を満たす．このような開近傍を全て集めてきた X の開集合をそれぞれ，$X^{\mathrm{s}}(\mathrm{Pre}), X^{\mathrm{ss}}(L), X^{\mathrm{s}}(L)$ で表す[*38]． □

注意 2.30 $U \subset X$ を連結かつアフィンな invarinat open subset で，$G \curvearrowright U$ は閉であるとする．このとき，定理 2.18 より $G \curvearrowright U$ は geometric quotient (Y, ϕ) をもち，Y は Noether かつ ϕ は有限型になる．よって注意 1.32 より U の幾何学的点の stabilizer は全て同じ次元を持つ．よって，$X^{\mathrm{s}}_{(i)}(L)$ および $X^{\mathrm{s}}_{(i)}(\mathrm{Pre})$ を stabilizer の次元が $i \geq 0$ であるような $X^{\mathrm{s}}(L)$ および $X^{\mathrm{s}}(\mathrm{Pre})$ の幾何学的点の開集合としたときに，非交和分解

$$X^{\mathrm{s}}(L) = X^{\mathrm{s}}_{(0)}(L) \cup \cdots \cup X^{\mathrm{s}}_{(r)}(L)$$
$$X^{\mathrm{s}}(\mathrm{Pre}) = X^{\mathrm{s}}_{(0)}(\mathrm{Pre}) \cup \cdots \cup X^{\mathrm{s}}_{(r)}(\mathrm{Pre})$$

が存在する． □

定義 2.31（properly stable point） $X^{\mathrm{s}}_{(0)}(L)$ に含まれる幾何学的点は **properly stable** あるという． □

stabilizer group $S(x)$ が 0 次元であるとき，アフィン代数群は Zariski 位相の意味でコンパクトであるか

[*37] それでも尚，全ての軌道をパラメータ付ける空間を作りたいとき，カテゴリーを広げてスタックで考えるという発想に至るのだと思う．カテゴリーが広がると関手を表現する対象も一般には変わるので，スタックとして軌道のパラメータ空間と呼ぶに相応しい商（すなわち商の関手 $\underline{X/G}$ を表現する対象）を構成することができるかもしれない．

[*38] ここでは，G-linearization を定める写像 ϕ が省略された記法をとっている．しかし，系 2.45 において，例えば半単純群のような群に対しては，この開集合は G-linearization の写像の選び方に依らないことが分かり，この記法が正当化される．

ら，$S(x)$ は有限集合である．すなわち，properly stable point は stabilizer が有限群となるような点のことである．

注意 2.32 現代的には，（例えば向井先生の教科書や [Mu03] や，Huybrechts と Lehn の教科書 [HL10] においては，）この properly stable な点を **GIT stable**，または単に stable であるというので注意が必要である．
□

注意 2.33 可逆層 L が ample である場合には，X_s がアフィンであるという条件は自動的に成り立つ．逆に，L は開集合 $X^{\mathrm{ss}}(L)$ に制限したところでは ample である．このことに関しては例えば [Ha77, Chap.II, Theorem 7.6] の証明を見よ． □

注意 2.34 切断 $s \in H^0(X, L^n)$ で X_s がアフィンになるもの全体のなす部分集合は，$H^0(X, L^n)$ の部分線型空間をなす[*39]．これを V_n で表すことにすると，$X_{st} = X_s \cap X_t$ において X_s, X_t がアフィンなら X_{st} もアフィンである[*40]ことから，$\bigoplus_{n=0}^{\infty} V_n$ は次数付き環をなす．G 不変な切断で X_s がアフィンになるもの全体はこの環の部分次数付き環をなすが，この環が，アフィンの場合の不変式環の代わりになるものである． □

注意 2.35 任意の点 $x \in X$ に対して，G 不変なアフィン開近傍 $U \ni x$ が存在するとき，$x \in X$ を pre-semi-stable と呼ぶことにする．この第 4 の概念はあまり有用でない．しかし一応これに関連することとして，次の隅広の定理を挙げておこう：

トーラス T が正規多様体 X に作用しているとき，任意の $x \in X$ はある T 不変なアフィン開集合をもつ．□

これまでにいくつかの stability を定義したが，それらの stability をここで比較してみよう．まず pre-stability に関する商には次の様なことが成り立つ．証明は省略する．

命題 2.36 X を代数的スキーム，G を簡約代数群，$\sigma : G \curvearrowright X$ を作用とする．このとき，$X^{\mathrm{s}}(\mathrm{Pre})$ の G による uniform geometric quotient (Y, ϕ) が存在し，Y は代数的かつ，ϕ はアフィン射になる．

逆に，$U \subset X$ を invarinat open set で，geometric quotient (Z, ψ) で ψ がアフィン射であるようなものが存在するものとすると，$U \subset X^{\mathrm{s}}(\mathrm{Pre})$ となる．

また，特に $\mathrm{char}(k) = 0$ のときは (Y, ϕ) は universal geometric quotinet になる． □

しかし，この geometric quotient のスキームには，分離性などの性質が全く期待できない．ただの集合としての商は常に存在するのであって，商にスキーム構造を入れる以上は，やはり分離性などのある程度良い条件が成り立って欲しい．よって，補題 1.37 や定理 2.18 などの結果を踏まえると一見妥当に見える pre-stability では，商を考えるのに不足であることが分かるのである．一方，G 線型化をもつ直線束を固定して，semi-stability および stability を考えると上手くいく．次の定理は **GIT の基本定理**と呼ばれる，GIT の主定理の一つである．

定理 2.37（GIT の基本定理） X を代数的スキーム，G を簡約代数群，$\sigma : G \curvearrowright X$ を作用，$L \in \mathrm{Pic}X$ を G-linearization を固定した直線束とする．このとき，$X^{\mathrm{ss}}(L)$ の G による uniform categorical quotient (Y, ϕ) が存在して，次をみたす．

[*39] 証明が書かれた EGA 以外の文献を探しています．

[*40] これは，X が分離的でなくても正しい．実際，$s \in H^0(X, L^n)$，$t \in H^0(X, L^m)$ であるとき，X_{st} はアフィンスキーム X_s の中で $t^n/s^m = 0$ で定義される閉部分スキームである．

(a) ϕ はアフィン射で，universally submersive である．

(b) ある Y 上の豊富直線束 M が存在して，$\phi^* M \simeq L$ となる．特に Y は準射影的で，したがって分離的になる．

(c) ある部分スキーム $\tilde{Y} \subset Y$ が存在して，$X^{\mathrm{s}}(L) = \phi^{-1}(\tilde{Y})$ かつ，$(\tilde{Y}, \phi_{|X^{\mathrm{s}}(L)})$ は $X^{\mathrm{s}}(L)$ の G による uniform geometric quotinet になる． □

証明　X はネーター的であるので，ある整数 N と L^N の invariant section $s_1, \ldots, s_n$ で $U_i = X_{s_i}$ がアフィンであり且つ $X^{\mathrm{ss}}(L) = \bigcup_{i=1}^n U_i$ となるものが存在する．定理 2.14 より，U_i の G による uniform categorical quotient (V_i, ϕ_i) が存在する．証明の第一段階として，この V_i たちを貼り合わせて代数的スキームを作ろう．任意の組み (i,j), $1 \leq i,j \leq n$ に対して，s_j/s_i は環 $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ の不変式である．定理 2.14 の証明より，$\Gamma(V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ は $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ の不変式環であるから，s_j/s_i は $\sigma_{ij} \in \Gamma(V_i, \mathcal{O}_{V_i})$ を定める．$V_{ij} = V_i \setminus \{y \mid \sigma_{ij}(y) = 0\}$ とする．このとき，

$$\phi_i^{-1}(V_{ij}) = U_i \cap U_j = \phi_j^{-1}(V_{ji})$$

である．V_i は U_i の *uniform* categorical quotient であるから，V_{ij} は $U_i \cap U_j$ の categorical quotient である．

$$\begin{tikzcd} U_i \cap U_j \arrow[r, hook] \arrow[d, "\phi_i"'] \arrow[dr, phantom, "\Box"] & U_i \arrow[d, "\phi_i"] \\ V_{ij} \arrow[r, hook] & V_i \end{tikzcd}$$

同様に，V_{ji} も $U_i \cap U_j$ の categorical quotient であるので，次の図式を可換にする同型 $\psi_{ij} : V_{ij} \to V_{ji}$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} & U_i \cap U_j \arrow[dl, "\phi_i"'] \arrow[dr, "\phi_j"] & \\ V_{ij} \arrow[rr, "\psi_{ij}"'] & & V_{ji} \end{tikzcd}$$

貼り合わせの cocycle 条件は，この写像の一意性から従う．$\{V_i\}$ を gluing lemma で貼り合わせて作った多様体を Y とする．射の gluing lemma より $\phi : X^{\mathrm{ss}}(L) \to Y$ も存在する．この射がアフィン射でかつ universally submersive であることは，$\phi^{-1}(V_i) = U_i$ であることと，ϕ_i たちが universally submersive であることから明らか．

$\sigma_{ij|V_{ij}} \in \Gamma(V_{ij}, \mathcal{O}_Y^*)$ は開被覆 $\{V_i\}$ 上で Cech 1-cocycle 条件を満たしているので，$H^1(Y, \mathcal{O}_Y^*) \simeq \mathrm{Pic}(Y)$ の元を定めるから，これを M とする．構成から，$\phi^* M = L$ となる．この M が ample であることを示そう．j をひとつ固定して，$\{\sigma_{ij}\}_i$ を考える．$V_{i_1,i_2} = V_{i_1} \cap V_{i_2}$ 上では $\sigma_{i_2,j} = \sigma_{i_1,j} \cdot \sigma_{i_2,i_1}$ 満たす．$\sigma_{i_2 i_1}$ は変換関数であることを思い出せば，$\{\sigma_{ij}\}_i$ は M の切断 t_j を定めることが分かる．

$$\begin{tikzcd} H^0(V_{i_1,i_2}, \mathcal{O}_Y) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[rr, bend left, "\cdot\sigma_{i_2,i_1}"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & H^0(V_{i_1,i_2}, M) \arrow[r, phantom, "\simeq"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & H^0(V_{i_1,i_2}, \mathcal{O}_Y) \arrow[d, phantom, "\cup"] \\ \sigma_{i_1,j}|_{V_{i_1,i_2}} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{対応}"'] & t_j|_{V_{i_1,i_2}} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{対応}"'] & \sigma_{i_2,j}|_{V_{i_1,i_2}} \end{tikzcd}$$

このとき，作り方から $s_j = \phi^*(t_j)$ である．よって，任意の $x \in X^{\mathrm{ss}}(L)$ に対して，

$$s_j(x) = 0 \Leftrightarrow t_j(\phi(x)) = 0$$

が成り立つから，$V_j = Y_{t_j}$ となる．M の切断の族 $\{t_j\}_j$ で Y_{t_j} がアフィンであるようなものが取れたので，[Ha77, Chap.II, Theorem 7.6] の証明から M は ample になる．したがって Y は準射影的であるから，[Ha77, Chap.II, Theorem 4.9] より分離的である．

必要があれば s_i たちをより多くとって，$I \subset \{1, \ldots, n\}$ を

(a) $i \in I$ ならば，G の U_i への作用が閉で，
(b) $X^{\mathrm{s}}(L) = \bigcup_{i \in I} U_i$

となるように定める．このとき，$X^{\mathrm{s}}(L) = \phi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)$ である．$\tilde{Y} := \bigcup_{i \in I} V_i$ とする．

最後に，Y が $X^{\mathrm{ss}}(L)$ の G による uniform categorical quotient であることと，$\tilde{Y}$ が $X^{\mathrm{s}}(L)$ の G による uniform geometric quotient であることを示す．Y が uniform categorical quotient であることは注意 1.26 から従う．また，$\tilde{Y}$ が geometric quotient であることは $\tilde{Y}$ の構成から，uniform であることは ϕ が universally submersive であること及び注意 1.28 より従う． ■

注意 2.38 X が k 上固有で L が ample であるとき，$X^{\mathrm{ss}}(L)$ の G による categorical quotient Q は k 上射影的になる．つまり，Q はより重要な $X^{\mathrm{s}}(L)$ の G による商のコンパクト化になっている．実際，次数付き環 $R = \sum_{n=0}^{\infty} H^0(X, L^n)$ は L が ample なので k 上有限型であり，R の不変切断からなる部分次数付き環 R_0 も定理 7.1 より有限型である．構成から $Q = \operatorname{Proj} R_0$ となっているので，Q が射影的であることが従う．実は，商 $X^{\mathrm{ss}}(L)/G$ は，$X^{\mathrm{ss}}(L)$ を同値関係 $x \sim y :\Leftrightarrow \overline{O(x)} \cap \overline{O(y)} \neq 0$（閉包同値）による商に一致する． □

命題 2.39 X を代数的スキーム，G を簡約代数群，$\sigma : G \curvearrowright X$ を作用，$L \in \mathrm{Pic} X$ を G 線型化を固定した直線束とする．また，$x \in X^{\mathrm{ss}}(L)$ を幾何学的点とする．このとき，次は同値である．

(i) $x \in X^{\mathrm{s}}(L)$ となる．
(ii) x は G の作用で regular かつ，軌道 $O(x) \subset X^{\mathrm{ss}}(L) \otimes_k \bar{k}$ は閉部分集合である．
(iii) x は G の作用で regular かつ，ある invariant section $s \in H^0(X, L^n)$ で，$s(x) \neq 0$ かつ X_s がアフィンになるものが存在し，$O(x) \subset \overline{X_s}$ は閉部分集合である．

さらに，$x_1, \ldots, x_n$ を $X^{\mathrm{ss}}(L)$ の幾何学的点とすると，ある invariant section $s \in H^0(X, L^m)$ で，X_s がアフィンかつ任意の i に対して $s(x_i) \neq 0$ となるようなものが存在する． □

GIT の基本定理の逆として，次のようなことが成り立つ．

命題 2.40 簡約代数群 G が代数的スキーム X に作用しているとし，この作用の categorical quotient (Y, ϕ) で ϕ がアフィン射かつ Y が準射影的であるものが存在するとする．このとき，ある G-linearizaton をもつ可逆層 $L \in \mathrm{Pic}^G(X)$ が存在して，$X = X^{\mathrm{ss}}(L)$ となる．さらに，(Y, ϕ) が geometric quotient であるならば，$X = X^{\mathrm{s}}(L)$ となる． □

証明 M を Y 上の ample な可逆層とする．このとき，$\phi^* M =: L$ は自然な G-linearization で，任意の $s \in H^0(Y, M^n)$ に対して $\phi^*(s) \in H^0(X, L^n)$ が invariant section であるようなものを持つのであった．Y はアフィン開集合 Y_s による開被覆を持つので，X はアフィン開集合 $\phi^{-1}(Y_s) = X_{\phi^*(s)}$ による開被覆を持つ．従って，$X = X^{\mathrm{ss}}(L)$ である．また，(Y, ϕ) が geometric quotient であるならば，補題 1.37 より作用は閉であるから，$X = X^{\mathrm{s}}(L)$ である． ■

G がスキーム X に作用しているとする．このとき，開集合 $U \subset X$ で商 U/G が存在するものを全て分類す

るというのは面白い問題である．前の命題は，この問題への回答を U 上の直線束 L と開集合 $U^{\mathrm{s}}(L)$ に関連づける形で与えているが，実はこの命題は応用上あまり使い勝手のよいものとは言えない．

しかし，この問題の回答を $X^{\mathrm{s}}(L)$ の開集合と関連づける形で与えることができれば，$X^{\mathrm{s}}(L)$ は全ての G 不変な開集合 U を調べずとも決定できてしまう場合があるので，応用する上で非常に便利な結論が得られる．この方面の結果としては，次のようなものがある：

命題 2.41 X を連結かつ k 上滑らかな代数的スキームとし，連結な簡約代数群 G が X に作用しているとする．$U \subset X$ を G 不変な開集合とする．このとき，以下は同値である．

(i) ある $L \in \mathrm{Pic}^G(X)$ に対して，$U \subset X^{\mathrm{s}}(L)$ となる．

(ii) U の G による geometric quotient (Y, ϕ) であって，ϕ がアフィン射でかつ Y が準射影的であるものが存在する．

さらに，X の幾何学的点の stabilizer が全て 0 次元であるならば，(i), (ii) は次の (iii) とも同値である．

(iii) G の U への作用は固有であり，U の G による geometric quotient (Y, ϕ) で Y が準射影的であるものが存在する． □

証明 (iii) が成り立つとすると，命題 2.40 と注意 2.33 より X は分離的スキームになり，このとき条件 (ii) が命題 1.38 より従う．また，(ii) が成り立つとすると命題 2.40 より $X^{\mathrm{s}}_{(0)}(L)$ であり，系 4.8 より作用が固有であることが従う．(i) から (ii) は定理 2.37 より従う．

(ii) が成り立つと仮定して (i) を示す．命題 2.40 より，ある U 上の G-linearization をもつ可逆層 L が存在して $U^{\mathrm{s}}(L)$ が成り立つ．$X \setminus U$ の余次元 1 の既約成分 $D_1, \ldots, D_k$ と十分大きな N に対して

$$L' := L\left(N\sum_{i=1}^{k} D_i\right)$$

と定めると，X が滑らかで Weil 因子と Cartier 因子が一致するので L' は X 上の可逆層である．

L の $G \times U$ 上の G-linearization ϕ を $G \times X$ 上に延長する．ϕ に対応する $p_2^*L \otimes \sigma^*L^{-1}$ の切断を ψ とする．G が連結なので，$G \times U$ の外側にある $G \times X$ の既約因子は $G \times D_1, \ldots, G \times D_k$ のみである．ψ の $G \times D_i$ での位数を k_i とすると，ψ は $(p_2^*L \otimes \sigma^*L^{-1})\,(-\sum k_i(G \times D_i))$ の切断に延長できる．したがって，ϕ は σ^*L と $p_2^*L\,(-\sum k_i(G \times D_i))$ の同型に延長できる．この同型を $\{e\} \times X$ に制限すると，L と $L\,(-\sum k_i D_i)$ の同型が得られる．この同型を $\{e\} \times U$ に制限すると，ϕ が cocycle 条件を満たすことから L の恒等射が得られる．したがって，任意の i に対し $k_i = 0$ であり，結果として ϕ の $G \times X$ 上への延長が得られた．U が G 不変であることから，G の作用で D_i はある D_j にうつるので，さっきと同じ理由で ϕ は $G \times X$ 上の L' の G-linearization に延長できる．

N が十分大きければ，$U \subset X^{\mathrm{s}}(L')$ となることを示す．$x \in U$ を幾何学的点とすると，ある $s \in H^0(U, L^n)$ が存在して U_s はアフィンで G の U_s への作用は閉，かつ $s(x) \neq 0$ となる．N が十分大きければ，s は $t \in H^0(X, L'^n)$ に延長でき，さらに N を大きくすることで t は $D_1, \ldots, D_k$ 上 0 であるようにできる．s が G 不変なので，t も G 不変である．最後に，$X_t = U_t$ を示す．明らかに

$$U_s \subset X_t \subset X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} D_i$$

は成り立つ．X_t, U_s は滑らかでアフィンなので，$X_t \setminus U_s$ は X の中で余次元 1 である[*41]しかし，そのような部分多様体は D_i たちでつくされているので，$X_t = U_s$ となる．したがって，$x \in X^{\mathrm{s}}(L')$ である． ■

命題 2.42 X を k 上の代数的スキーム，G を簡約代数群，$\sigma : G \curvearrowright X$ を作用，L を G 線型化された可逆層とする．このとき，任意の拡大体 K/k に対して，$\overline{X} := X \otimes_k K$，$\overline{L} := p_1^* L \in \mathrm{Pic}\overline{X}$ とすると，等式

$$\overline{X}^{\mathrm{s}}(\overline{L}) = \overline{X^{\mathrm{s}}(L)}$$
$$\overline{X}^{\mathrm{ss}}(\overline{L}) = \overline{X^{\mathrm{ss}}(L)}$$

が成り立つ． □

証明 命題 2.39 の (ii) より，$X^{\mathrm{ss}}(L)$ に関する主張が示されれば $X^{\mathrm{s}}(L)$ に関する主張も従う．さて，$k \subset K \subset \bar{k}$ であるとき，

$$\mathrm{Hom}_k(\mathrm{Spec}\,\bar{k}, X) = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Spec}\,\bar{k}, X \otimes_k K)$$

かつ K/k は平坦なので [Ha77] III, Proposition 9.3. より

$$H^0(\overline{X}, \overline{L}) = H^0(X, L) \otimes_k K$$

が成り立つから，K が代数的閉体の場合に証明できれば十分である．しかしここで，K/k が分離的であると仮定できると都合がよい．K の中で k 上純非分離的な元全体のなす体を L_p とすると，K/L_p は分離拡大になることを思い出せば，別途で K/k が純非分離拡大の場合を考えればよいことになる．以上をまとめると，次の 2 つの場合について証明できればよい．

(i) K は代数閉体で，K/k は分離的.

(ii) K/k は純非分離的.

まず (i) の場合を考えよう．$V_n \subset H^0(X, L^n)$ を non-vanishing locus がアフィンになる invariant section のなす部分線形空間とする．また，$\overline{V}_n \subset H^0(\overline{X}, \overline{L}^n)$ も同様に定める．このとき，中間体 $k \subset K' \subset K$ で，ある部分空間 $V \subset H^0(X \otimes_k K', p_1^* L^n)$ が存在して $V \otimes_{K'} K = \overline{V}_n$ となるようなもののうち，最小のものをとりこれを $\overline{V}_n$ の定義体ということにする．$\tau \in \mathrm{Aut}(K/k)$ をとる．この τ は $G \curvearrowright X$ および G 線型化と可換であることが容易に確かめられる．よって，τ が引き起こす

$$H^0(\overline{X}, \overline{L}^n) \longrightarrow H^0(\overline{X}, \overline{L}^n)$$

において，invarinat section は invariant section にうつる．また，$\overline{X}_s$ がアフィンなら，$\overline{X}_{s^\tau} = (\overline{X}_s)^\tau$ もアフィンである．よって，τ は $\overline{V}_n \to \overline{V}_n$ を誘導する．このとき，[Ca60, Chap.1] より τ は K' の元を固定することが分かる．K/k は分離的かつ K が代数的閉体より，これは $K' = k$ を意味する．従って，ある部分線形空間 $V_n' \subset H^0(X, L^n)$ が存在して $\overline{V}_n = V_n' \otimes_k K$ となる．しかし，SGA1, Chap.8, Cor5.6 より，invarinat section $s \in H^0(X, L^n)$ に対し，$s \in V_n$ となる必要十分条件は $\bar{s} \in \overline{V}_n$ となることであるから，$V_n = V_n'$ が得られる．これで (i) の場合に主張を得た．

[*41] 滑らかならば特に正規である．正規スキーム X と余次元 2 以上の閉部分スキーム Z，$U = X \setminus Z$，X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対して，$\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}_{|U}$ が成り立つ ([川又 1] 系 1.8.3)．例えば X と U が両方アフィンだとすると，$\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_{X|U} \simeq \mathcal{O}_X$ となるから，$X \simeq U$ となってしまう．したがって，正規なアフィンスキームの間の開埋め込み $Y \supset V$ が真の包含関係であるなら，閉部分多様体 $W = Y \setminus V$ は Y の中で余次元 1 の成分を持たねばならない．

次に (ii) の場合を考える．K/k が純非分離的（かつ $K \neq k$）な場合，k の標数は正であるからこれを p としておこう．任意の $s \in H^0(\overline{X}, \overline{L}^n) = H^0(X, L^n) \otimes_k K$ は，$H^0(X, L^n)$ の基底 $e_1, \dots, e_N$ と，$\alpha_1, \dots, \alpha_N \in K$ を用いて

$$s = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_N e_N$$

と表せる．ここで，K/k は純非分離拡大より各 i に対して正整数 m_i が存在して $\alpha_i^{p^{m_i}} \in k$ となる．このような m_i の内で最大のものを m とすれば，

$$\begin{aligned} s^{p^m} &= (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_N e_N)^{p^m} \\ &= \alpha_1^{p^m} e_1^{p^m} + \cdots + \alpha_N^{p^m} e_N^{p^m} \in H^0(X, L^{n \cdot p^m}) \end{aligned}$$

となる．これと同型

$$\overline{X}_s = X_{s^{p^m}} \times_k K$$

より (ii) の場合にも主張が従う． ■

命題 2.43 G を簡約代数群，X を k 上の代数的スキーム，$\sigma : G \curvearrowright X$ を作用，L を G 線型化された X 上の可逆層とする．また，G_0 を G の単位元を含む連結成分とする．このとき，stable point（または semi-stable point）の開集合は G で考えても G_0 で考えても同じものになる． □

証明 命題 2.42 より，k が代数的閉体である場合に証明できればよい．さらに，命題 2.39 の (iii) の条件は G で考えても G_0 で考えても変わらない．従って，semi-stable な点についてのみ示せばよい．U を G の作用による semi-stable な点の開集合，U_0 を G_0 の作用による semi-stable な点の開集合とする．G-linearizaton による双対作用の仕方が次の図式で与えられていたことを考えれば，$U \subset U_0$ は明らかである．

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(X,L) & \xrightarrow{\sigma^*} & H^0(G \times X, \sigma^* L) & \xrightarrow{\phi^*} & H^0(G \times X, p_2^*) & \xrightarrow{\simeq} & H^0(G, \mathcal{O}_G) \otimes H^0(X,L) \\ & & \downarrow{\scriptstyle |G_0} & & \downarrow{\scriptstyle |G_0} & & \downarrow{\scriptstyle |G_0} \\ & & H^0(G_0 \times X, \sigma^* L) & \xrightarrow{\phi^*} & H^0(G_0 \times X, p_2^* L) & \xrightarrow{\simeq} & H^0(G_0, \mathcal{O}_{G_0}) \otimes H^0(X,L) \end{array}$$

U_0 は G_0 だけではなく G の作用でも不変である．実際，$\alpha \in G(k)$, $s \in H^0(X, L^n)$ を G_0-invariant とすると，L が G-linearized であることを用いて $s^\alpha := s(\alpha^{-1} \cdot -) \in H^0(X, L^n)$ を定めることができる．$x \in X_{s^\alpha}(k)$ と $g \in G_0(k)$ に対して，

$$s^\alpha(gx) = s(\alpha^{-1} gx) = s(\alpha^{-1} g \alpha \cdot \alpha^{-1} x)$$

である．x の取り方から $s(\alpha^{-1}x) \neq 0$，すなわち $\alpha^{-1}x \in X_s$． G_0 が正規部分群であるから，$\alpha^{-1} g \alpha \in G_0$ であるので，s が G 不変なことから $s(\alpha^{-1} g \alpha \cdot \alpha^{-1} x) \neq 0$，すなわち $s^\alpha(gx) \neq 0$ となるので，s^α はまた G_0-invariant である．$\sigma(\alpha, X_s) = X_{s^\alpha}$ であるから，U_0 が G 不変であることが分かった．

$x \in U_0$ を閉点とし，$\alpha_0, \dots, \alpha_N$ を剰余群 G/G_0 の代表元とする．U_0 が G 不変だったので，$\sigma(\alpha_i, x) \in U_0$ でもある．命題 2.39 の後半を有限個の点 $\{\sigma(\alpha_i, x)\}_{i=0}^N$ に対し用いて，G 不変切断 $s \in H^0(X, L^n)$ で任意の i に対して $s(\sigma(\alpha_i, x)) \neq 0$ となるものがとれる．$s' := \prod_{i=0}^N s^{\alpha_i}$ として定めると，s' は L^{nN} の G 不変切断であり，$s'(x) \neq$ である．また，注意 2.33 より U_0 は $L_{|U_0}$ が ample であることから準射影的であり特に分離的なので，アフィン開集合の共通部分として得られている

$$X_{s'} = \bigcap_{i=0}^N \sigma(\alpha_i, X_s) = \bigcap_{i=0}^N X_{s^{\alpha_i}}$$

はやはり U のアフィン開集合である．したがって，$x \in U$ となる． ■

命題 2.44 G を簡約代数群，X を代数的スキーム，$\sigma : G \curvearrowright X$ を作用，L を G 線型化された X 上の直線束とする．このとき，$f : X_{\mathrm{red}} \to X$ を標準的な埋め込みとしたとき，等号

$$X^{\mathrm{ss}}(L) = X^{\mathrm{ss}}_{\mathrm{red}}(f^*L)$$
$$X^{\mathrm{s}}(L) = X^{\mathrm{s}}_{\mathrm{red}}(f^*L)$$

が成り立つ． □

証明 例によって semi-stable point の場合に証明できればよい．$\subset$ の包含関係は明らか．$\supset$ の包含関係を示す．invarinant section $s \in H^0(X_{\mathrm{red}}, f^*L^n)$ で，$(X_{\mathrm{red}})_s$ がアフィンになるものをとる．このとき，ある k と s^k の X 上への延長 $t \in H^0(X, L^{nk})$ で，invarinat section であるものが存在することを示せばよい．実際，このとき $(X_t)_{\mathrm{red}} = (X_{\mathrm{red}})_s$ より X_t がアフィン開集合であることは自動的に従う*42．

EGA 2, (4.5.13.1) より，ある k と s^k の延長 $t \in H^0(X, L^{nk})$ は存在する．E を $H^0(X, L^{nk})$ 上の Reynolds 作用素とすれば，Et は invariant section であり，E が $f^* : H^0(X, L^{nk}) \to H^0(X_{\mathrm{red}}, f^*L^{nk})$ と可換であることより Et は再び s^k の延長になっている．t をこの Et に取り替えればよい． ■

系 2.45 G を簡約代数群，X を代数的スキーム，$\sigma : G \curvearrowright X$ を作用，L を G 線型化された X 上の直線束とする．さらに，$\overline{G}$ の連結成分から $\overline{\mathbb{G}_m}$ に非自明な準同型がないとする．このとき，$X^{\mathrm{ss}}(L)$ および $X^{\mathrm{s}}(L)$ は L の G 線型化の選び方によらない． □

証明 命題 2.42 より k は代数閉体としてよく，命題 2.44 より X は被約であるとしてよい．このとき，[Ha77] II, Ex. 3.15(b) より，X は幾何的被約である．一方，命題 2.43 より G は連結であるとしてよい．X が幾何的被約，G が連結代数群の下では，主張は命題 2.22 より従う． ■

*42 スキーム Z に対して，スキーム構造を被約に取り替えた閉部分スキーム Z_{red} がアフィンであるならば，Z もアフィンスキームである．このことは Hartshorne の教科書 [Ha77] には書かれていないが，例えば Sernesi によるスキームの変形理論の本 [Se06] の Lemma 1.2.3. で証明されている．