4 Analysis of stability (Chapter 2 of GIT)

4.1 A numerical criterion

k は代数的閉体であるとする．

定義 4.1（1-parameter subgroup） k 上の代数群 G に対して，準同型 $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ を G の **1-パラメーター部分群 (1-parameter subgroup)** という．普通は 1-PS などと略記する． □

代数群 G が k 上固有な代数的スキーム X に作用しているとする．$x \in X$ を閉点とし，λ を G の 1-PS とする．射 $\psi_x \circ \lambda : \mathbb{G}_m \to X$ を考える．$\mathbb{G}_m \simeq \operatorname{Spec} k[\alpha, \alpha^{-1}] \subset \mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[\alpha]$ であるので，固有性の付置判定法によって $\psi_x \circ \lambda$ は射 $f : \mathbb{A}^1 \to X$ に延長できる[*43]．閉点 $f(0) \in X$ は，$\sigma(\lambda(\alpha), x)$ の $\alpha \to 0$ のときの**極限 (limit)** または **specialization** という．明らかに，$f(0)$ は λ による $\mathbb{G}_m$ の X への作用の固定点である．$L \in \operatorname{Pic}^G(X)$ に対し，G-linearization の $G \times \{f(0)\}$ への制限を考える．L の $f(0)$ におけるファイバーを $\mathbb{A}^1$ と同一視すれば，§2.3 で見たように線形作用

$$G \times_k \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1,$$

すなわち G の 1 次元表現 $G \to \mathbb{G}_m$ が得られる．この線形表現を 1-PS $\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ と合成すれば，$\mathbb{G}_m$ の 1 次元表現（指標）χ が得られるが，これは $\mathbb{G}_m$ の指標の分類から $\alpha \in \mathbb{G}_m(k)$ に対して $\chi(\alpha) = \alpha^r$ の形である．

以上の準備の下，次の重要な概念を定義をすることができる．

定義 4.2 代数群 G が k 上固有な代数的スキーム X に作用しているとし，$x \in X$ を閉点，λ を G の 1-PS とする．$L \in \operatorname{Pic}^G(X)$ の G-linearization を x の λ による極限に制限したときに得られる $\mathbb{G}_m$ の指標 χ が $\chi(\alpha) = \alpha^r$ で与えられているとき，

$$\mu^L(x, \lambda) = -r$$

と表すことにする．定義から，μ は次の性質を満たす．

(i) $\alpha \in \mathbb{G}_m(k)$ に対し，$\mu^L(\sigma(\alpha, x), \lambda) = \mu^L(x, \alpha^{-1} \cdot \lambda \cdot \alpha)$ となる．

(ii) 閉点 $x \in X$ と 1-PS λ に対し，$\operatorname{Pic}^G(X) \to \mathbb{Z},\ \ L \mapsto \mu^L(x, \lambda)$ は群準同型である．

(iii) G 線型写像 $f : X \to Y$ と $L \in \operatorname{Pic}^G(Y)$ および $x \in X(k)$ に対し，

$$\mu^{f^*L}(x, \lambda) = \mu^L(f(x), \lambda)$$

が成り立つ．

(iv) $\alpha \to 0$ のとき $\sigma(\lambda(\alpha), x) \to y$ となるとき，$\mu^L(x, \lambda) = \mu^L(y, \lambda)$ が成り立つ． □

次の定理は **Hilbert-Mumford の数値的判定法 (Hilbert-Mumford numerical criterion)** と呼ばれ，GIT の基本定理と並んで GIT の主定理の一つとされる重要な定理ある．

定理 4.3（Hilbert-Mumford の数値的判定法） 簡約代数群 G が k 上固有な代数的スキーム X に作用している

[*43] コンパクトハウスドルフであれば点列の収束先が一意に存在するということのスキーム論的類似である．

とし，$L \in \mathrm{Pic}^G(X)$ は ample であるとする．このとき，$x \in X(k)$ に対して：

$$x \in X^{\mathrm{ss}}(L) \Leftrightarrow \mu^L(x,\lambda) \geq 0 \ \ \text{for all 1-PS's } \lambda$$
$$x \in X^{\mathrm{s}}_{(0)}(L) \Leftrightarrow \mu^L(x,\lambda) > 0 \ \ \text{for all 1-PS's } \lambda$$

が成り立つ． □

証明の基本的なアイディアは Hilbert の [Hi] における $G = \mathrm{SL}(n)$, $X = \mathbb{P}^n$ の場合の研究に寄っているので，この名前が付いている．

■Hilbert-Mumford の数値的判定法の証明　十分 twist して，L は very ample であるとしてよい．X を L を使って射影空間に G 同変に埋め込んで $X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ とする．$(\mathbb{P}^{n-1})^{\mathrm{ss}}(\mathcal{O}(1))$ の X への制限は定義より $X^{\mathrm{ss}}(L)$ であり，定理 2.47 より $(\mathbb{P}^{n-1})^{\mathrm{s}}_{(0)}(\mathcal{O}(1))$ の制限は $X^{\mathrm{s}}_{(0)}(L)$ に一致する．したがって，$X = \mathbb{P}^{n-1}$, $L = \mathcal{O}(1)$ の場合に帰着できる．

$$V = H^0(\mathbb{P}^{n-1}, \mathcal{O}(1))$$
$$\mathbb{A}^n = \mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}(V))$$

このとき，自然な射影 $\mathbb{A}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}$ が存在する．$x^* \in \mathbb{A}^n$ が $x \in \mathbb{P}^{n-1}$ の上にあるとは，$x^* \neq 0$ であり x^* が射影で x にうつるときいう．命題 2.26 の証明中にも触れたように，G の $\mathbb{P}^{n-1}$ への作用 σ と $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}$ の G-linearization の組は，

(i) G の V への双対作用，
(ii) G の $\mathbb{A}^n$ への線形作用であって，σ と可換なもの．

を定める．まず，次の命題が成り立つ：

命題 4.4　$x \in \mathbb{P}^{n-1}$ が semi-stable であるための必要十分条件は，x の上にある閉点 x^* の軌道 $O(x^*)$ の閉包が原点 0 を含まないことである．x が properly stable であるための必要十分条件は，x の上にある閉点 x^* に対し，ψ_{x^*} が固有であることである． □

念のため思い出しておくと，$\psi_{x^*} : G \times_k \mathrm{Spec}\, k \xrightarrow{1 \times x^*} G \times_k \mathbb{A}^n \xrightarrow{\sigma} \mathbb{A}^n$ である．

証明

次に，関数 μ を $X = \mathbb{P}^{n-1}$ の場合に詳しく調べる．まず，代数的トーラスのアフィン空間への作用（すなわち，代数的トーラスの線形表現）は対角化可能である，という表現論の定理を思い出そう．さらに，代数的トーラス $\mathbb{G}_m^r$ の指標 χ は，ある整数 m_i たちに対して

$$\mathbb{G}_m^r \ni (\alpha) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \mapsto \prod_{i=1}^{r} \alpha_i^{m_i} \in k$$

と与えられるのであった．特に，$\mathbb{G}_m$ の $\mathbb{P}^{n-1}$ への作用と，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$ の $\mathbb{G}_m$-linearization が与えられている状況を考えよう．このとき，$\mathbb{G}_m$ の $\mathbb{A}^n$ への線形作用は，適当な座標変換を施せば，ある整数 $r_1, \ldots. r_n$ を用いて

$$\mathbb{G}_m \ni \alpha \mapsto (\alpha^{r_i} \cdot \delta_{ij})_{ij} \in \mathrm{GL}(\mathbb{A}^n)$$

と，対角行列による作用として与えられる．

命題 4.5　$x \in \mathbb{P}^{n-1}$ を閉点，$\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ を G の 1-PS，$\sigma(\lambda(\alpha), x)$ を $\alpha \to 0$ としたときの極限が y だとする．$x^* \in \mathbb{A}^n$ を x の上の点とする．$\mathbb{A}^n$ の座標を，$\mathbb{G}_m$ の作用が対角行列で与えられるように選ぶ．この座標系において，$x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ であるとする．

このとき，等式

$$\mu^{\mathcal{O}(1)}(x, \lambda) = \max\{-r_i \mid i \text{ such that } x_i^* \neq 0\}$$

が成り立つ．さらに，次がそれぞれ同値である：

(i) $\sigma^*(\lambda(\alpha), x^*)$ が $\alpha \to 0$ のときの極限を持たない（または 0 でない極限が存在する，または極限が原点 0 である．）

(ii) $\mu(x; \lambda) > 0$（または $\mu(x, \lambda) = 0$，または $\mu(x, \lambda) < 0$.）　□

証明　$\mu_1 = \mu(x, \lambda)$，$\mu_2 = \max\{-r_i \mid i \text{ such that } x_i^* \neq 0\}$ とする．$\sigma(\lambda(\alpha), x^*)$ は座標

$$(\alpha^{r_1} \cdot x_1^*, \ldots, \alpha^{r_n} \cdot x_n^*)$$

で与えられていることに注意する．よって，$\mu_1 = \mu_2$ がひとたび示されてしまえば主張の後半は自明である．

一方，

$$\sigma(\lambda(\alpha), \alpha^{\mu_2} \cdot x^*) = (\alpha^{r_1+\mu_2} \cdot x_1^*, \ldots, \alpha^{r_n+\mu_2} \cdot x_n^*)$$

と表せる．任意の $i = 1, \ldots, n$ に対して $r_i + \mu_2 \geq 0$ であり，少なくとも一つの i で $x_i^* \neq 0$ であるものに対して $r_i + \mu_2 = 0$ であるから，$\sigma(\lambda(\alpha), \alpha^{\mu_2} \cdot x^*)$ は $\alpha \to 0$ としたとき $\mathbb{A}^n$ の中に原点でない極限 y^* をもつ．この y^* は，$\sigma(\lambda(\alpha), x)$ の極限 y の上の点でなければならない．今見ている座標系において $y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ と表すと，$y_i^* = 0$ となるのは，$x_i^* = 0$ または $r_i > -\mu_2$ のときである．したがって，

$$\sigma(\lambda(\alpha), y^*) = \alpha^{-\mu_2} \cdot y^*$$

である．言い換えれば，「$\mathbb{G}_m$ の y への自明な作用と，$\mathcal{O}(1)$ の $\mathbb{G}_m$-linearlization の y への制限」は，「$y*$ を通るアフィン直線 $\{\beta \cdot y^* \mid \beta \in k\}$ への $\mathbb{G}_m$ の線形表現 $\alpha : y^* \mapsto \alpha^{-\mu_2} \cdot y^*$」に対応している．$y*$ を通るアフィン直線は y 上の直線束 $\mathcal{O}(1) \otimes k(y)$ に標準的に同型である．したがって，定義によって

$$\mu_1 = \mu^{\mathcal{O}(1)}(x, \lambda) = \mu_2$$

である．　■

記号を次のように定める：

$$R = k[\![t]\!] \quad (t \text{ を変数とする形式的べき級数環})$$
$$K = k(\!(t)\!) \quad (R \text{ の商体})$$

G の R 値点 $G(R)$ は，射 $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} R$ によって G の K 値点 $G(K)$ の部分群になる．また，極大イデアルによる商 $R \to k$ によって，準同型 $\bar{\omega} : G(R) \to G(k)$ が定まる．$G(R)$ は，$\phi \in G(K)$ であって $t \in K$ を 0 に近づけたときに極限値をもつようなものからなる部分群であり，その極限値は $\bar{\omega}(\phi)$ で与えられる．

$\lambda : \mathbb{G}_m \to G$ を 1-PS としたとき，次のようにして標準的に G の K 値点 $\langle\lambda\rangle \in G(K)$ を定めることができる：

$$\tilde{A} : k[\alpha, \alpha^{-1}] \to K, \quad \alpha \mapsto t,$$
$$\langle\lambda\rangle : \operatorname{Spec} K \xrightarrow{A} \mathbb{G}_m \xrightarrow{\lambda} G.$$

t を 0 に近づけると，α も 0 に近づく．

定理 4.6（岩堀の定理） G を k 上の随伴型半単純代数群[*44]とする．このとき，$G(K)$ の $G(R)$ による両側剰余類は，1-PS λ について $\langle\lambda\rangle$ の形の元で代表される． □

k の標数を 0 とし，G を一般の k 上の簡約代数群とする．G の随伴表現 $\mathrm{Ad}: G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))$ の像を G' とし，$\pi: G \to G'$ とする．標数 0 で考えているので，generic smoothness によって π は smooth 射である．R が Hensel 局所環で π が smooth 射であるので，$\pi^*: G(R) \to G'(R)$ は全射である．

$\phi \in G(K)$ をとる．ϕ の $\pi^*: G(K) \to G'(K)$ による像 $\pi^*(\phi) \in G'(K)$ を考える．岩堀の定理によって，ある $\psi_1', \psi_2' \in G'(R)$ と G' の 1-PSλ が存在して，$\psi_1'\pi^*(\phi)\psi_2' = \langle\lambda\rangle$ とできる．$\pi^*: G(R) \to G'(R)$ の全射性によって，$\psi_1, \psi_2 \in G(R)$ が存在して $\pi^*(\psi_i) = \psi_i'$ が成り立つ．このとき，$\pi^*(\psi_1\phi\psi_2) = \langle\lambda\rangle$ である．したがって，はじめから $\pi^*(\psi) = \langle\lambda\rangle \in \lambda(\mathbb{G}_m)$ としてよい．このとき，ϕ は G の部分群 $\pi^{-1}(\mathbb{G}_m)$ の点である．$\pi^{-1}(\mathbb{G}_m)$ はトーラスの有限群による拡大である．

命題 4.7 次のことが成り立つ：

(i) ψ^* が固有射にならないための必要十分条件は，G の非自明な 1-PS λ が存在して，$\sigma(\lambda(\alpha), x^*)$ が $\alpha \to 0$ のとき極限をもつことである．

(ii) 原点 0 が軌道 $O(x^*)$ の閉包に属するための必要十分条件は，G の 1-PS λ が存在して，$\sigma(\lambda(\alpha), x^*)$ が $\alpha \to 0$ のとき極限をもつことである． □

命題 4.4，命題 4.5，命題 4.7 によって，Hilbert-Mumford の数値的判定法が証明された．

■Hilbert-Mumford の数値的判定法の応用

系 4.8 簡約代数群 G が代数的スキーム X に作用しているとする．$L \in \mathrm{Pic}^G(X)$ を G 線型化された可逆層とすると，G の $X^{\mathrm{s}}_{(0)}(L)$ への作用は固有である． □

[*44] 代数群の随伴表現の像として得られる代数群を，随伴群 (adjoint group) といい，随伴群と同型な代数群を随伴型 (of adjoint type) という．