7 Remarks

以下は，このノートの著者による Remark である．

■次数付き環の有限生成性について　この paragraph において，基礎体 k の標数は 0 であるとする．定理 2.14 の証明において，Mumford は categorical quotient が代数的スキームであることを証明するのに次数付き環を経由するトリックを用いた．実際の GIT における証明では次数付き環論の一般的な結果と思われるものを参考文献を引用せず用いていたが，その証明を考えているときに，Reynolds 作用素を用いて議論すれば Hilbert による有限群の場合の不変式論の第一基本定理の証明がそのまま適用できてることに気づいたのでメモしておく．

補題 7.1　k 上有限型な次数付き k 代数 $R = \bigoplus_{d\geq 0} R^d$，$(R^0 = k)$ に簡約代数群 G が次数を保つように双対作用しているとする．このとき，不変式環 $R_0 = \bigoplus_{d\geq 0} R_0^d$ も有限型 k 代数である．□

証明　Hilbert の基底定理より，R はネーター環であるから，イデアル $J = R\langle R_0^+\rangle$ は有限生成であり，したがって R_0 の斉次式 $f_1, \ldots, f_N$ が存在して $J = \langle f_1, \ldots, f_N\rangle_R$ と書ける．R_0 が k 代数として $f_1, \ldots, f_N$ で生成されることを次数 d による帰納法を用いて示す．$d = 0$ の場合はよい．$d-1$ 次までの不変式が $f_1, \ldots, f_N$ の多項式で表わせたとする．$h \in R_0^d$ をとると，$R_0^d \subset R_0^+ \subset J$ より，ある $a_i \in R^{d-\deg f_i}$ が存在して

$$h = a_1 f_1 + \cdots + a_N f_N$$

と書ける．両辺に R の Reynolds 作用素 E を apply すると，Reynolds 等式より

$$h = Eh = \sum_{i=1}^{N} E(a_i f_i) = \sum_{i=1}^{N} E(a_i) f_i$$

となる．帰納法の仮定より $E(a_i) \in R_0^{d-\deg f_i}$ は $f_1, \ldots, f_N$ の多項式で表せるので，h も $f_1, \ldots, f_N$ の多項式として表せる．したがって，R_0 は k 代数として有限型である．■

実際に Mumford が用いていたのは，おそらく次の補題である．証明は友人である H.K. 氏に教わった．

補題 7.2　A をネーター環，$R = \bigoplus_{i\geq 0} R^i$ を A 上の有限型次数付き環で $R^0 = A$ であるもの，$S = \bigoplus_{i\geq 0} S^i$ を R の次数付き A 部分環とする．このとき，S がネーターなら，S は A 上有限型である．

証明　R が有限型 A 代数なので，各 R^i は有限生成 A 加群である．A はネーター環なので，R^i の部分 A 加群 S^i も有限生成 A 加群である．$\{S^i\}_{i=1}^k$ で生成される S のイデアルを J_k とすると，包含関係

$$J_1 \subset J_2 \subset \cdots \subset J_k \subset \cdots$$

が成り立つ．また，$\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i = S^+$ である．ここで，S がネーター環であることを用いると，ある $N > 0$ が存在して，$S^+ = J_N = S \cdot S^1 + \cdots + S \cdot S^N$ となる．各 S^i が有限生成 A 加群であったので，S^+ も有限生成 A 加群である．$S = A[S^+]$ であり，S^+ が有限生成 A 加群なので，S は A 上有限型である．■

定理 2.14 の証明の該当部分の直前で R がネーターの場合に不変式環 R_0 もネーターであることは分かっていたので，R が体 k 上有限型ならば，この補題から不変式環 R_0 も有限型であることがわかる．