■代数群について　この paragraph では，Brion のノート [Br] に基づいて，命題 2.22 および命題 2.24 の証明で用いられている代数群に関する定理を証明する．

補題 7.3（Rosenlicht [Ro61]）　X, Y が既約な代数多様体であるとき，掛け算写像 $H^0(\mathcal{O}_X^*) \times H^0(\mathcal{O}_Y^*) \to H^0(\mathcal{O}_{X\times Y}^*)$ は全射である．　□

証明　$f \in H^0(\mathcal{O}_{X\times Y}^*)$ の元が，$g \in K(X)$ と $h \in K(Y)$ を用いて $f(x,y) = g(x)h(y)$ と書けることを示せばよい．実際このように書けたとき，$f_y : x \mapsto f(x,y)$ は任意の $y \in Y$ に対し $f_y \in H^0(\mathcal{O}_X^*)$ であり，h が定義されるような $y_0 \in Y$ を取れば $g(x) = f(x,y_0)h^{-1}(y_0)$ となり，$g \in H^0(\mathcal{O}_X^*)$ であることが従う．同様に $h \in H^0(\mathcal{O}_Y^*)$ も従う．

従って X, Y を適当な開集合に制限して考えてよいので，X, Y は正規アフィン多様体とする．準コンパクトなので射影空間に埋め込んで閉包をとった多様体を $\bar{X}$ で表すと，$\bar{X}$ は X を稠密開集合にもつ正規かつ既約な射影多様体であり，従って $\bar{X} \setminus X$ は余次元 1 の既約成分をもつ（[川又 1] 系 1.8.2.）．これらを $D_1, \ldots, D_r$ とする．$f \in H^0(\mathcal{O}_{X\times Y}^*)$ を $\bar{X} \times Y$ 上の有理関数とみる．このとき，$\mathrm{div}(f)$ は $(\bar{X} \setminus X) \times Y$ 上に台をもつ．従って，$\mathrm{div}(f) = \sum_{i=1}^r n_i(D_i \times Y)$ とかけ，よってさらに，ある空でない開集合 $V \subset Y$ に含まれる $y \in V$ に対して $\mathrm{div}(f_y) = \sum_{i=1}^r n_i D_i$ とかける．$y_0 \in V$ をひとつ固定して考えると，任意の $y \in V$ に対して $\mathrm{div}(f_y f_{y_0}^{-1}) = 0$ である．$\bar{X}$ は射影的かつ正規なので，x の関数として $f_y f_{y_0}^{-1}$ は定数関数である（[川又 1] 定理 1.9.9., [Ha77] Chap.II, Proposition 7.7.）．従って，$h(y) \in H^0(\mathcal{O}_Y^*)$ に対して $f(x,y) = f(x,y_0)h(y)$ となる．　■

補題 7.4　G を連結代数群とする．$f \in H^0(\mathcal{O}_G^*)$ が $f(e_G) = 1$ を満たすなら，$f \in \widehat{G}$ である．　□

証明　$G \times G$ 上の関数 $(g,h) \mapsto f(gh)$ は $H^0(\mathcal{O}_{G\times G}^*)$ の元になる．補題 7.3 より，これは $\phi, \psi \in H^0(\mathcal{O}_G^*)$ を用いて $f(gh) = \phi(g)\psi(h)$ と表せる．適当にスカラー倍することで，$\phi(e_G) = 1$ であるとしてよい．このとき，$f(h) = f(e_G h) = \phi(e_G)\psi(h) = \psi(h)$ より，$f = \psi$ である．また，このとき $\psi(e_G) = f(e_G) = 1$ であるので，$f(g) = f(g e_G) = \phi(g)\psi(e_G) = \phi(g)$ であるので，$f = \phi$ である．従って，$f(gh) = f(g)f(h)$ となるので，$f \in \widehat{G}$ となる．　■

補題 7.5（Rosenlicht [Ro61]）　G を連結代数群とし，X を既約代数多様体とする．このとき，掛け算写像 $\widehat{G} \times H^0(\mathcal{O}_X^*) \to H^0(\mathcal{O}_{G\times X}^*)$ は同型写像である．特に，$X = \mathrm{Spec}\, k$ とすれば，同型 $H^0(\mathcal{O}_G^*) \simeq \widehat{G} \times k^*$ が得られる．

また，X が G の作用をもつときは，任意の $f \in H^0(\mathcal{O}_X^*)$ に対してある $\chi = \chi(f) \in \widehat{G}$ が存在して $f(g \cdot x) = \chi(g)f(x)$ が成り立つ．この対応 $H^0(\mathcal{O}_X^*) \ni f \mapsto \chi(f) \in \widehat{G}$ によって，完全列

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_X^*)^G \to H^0(\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\chi} \widehat{G}$$

が存在する．　□

証明　補題 7.3 及び補題 7.4 から明らかである．　■

補題 7.6　X を連結代数群 G の作用をもつ既約な代数多様体とする．このとき，X の自明な直線束 $p_1 : X \times \mathbb{A}^1 \to X$ の任意の G-linearization は，ある $\chi \in \widehat{G}$ が存在して $g \cdot (x,z) = (g \cdot x, \chi(g) \cdot z)$ の形になる[*45]．

---

*45 命題 2.22 も見よ．

□

証明　2.3 節での記号を用いる．G-linearization を

$$\Phi : G \times X \times \mathbb{A}^1 \to G \times X \times \mathbb{A}^1$$

とする．$\Sigma = p_2 \circ \Phi : G \times (X \times \mathbb{A}^1) \to X \times \mathbb{A}^1$ を考えると，Σ は $\mathbb{A}^1$ への $\mathbb{G}_m$ の作用に関して線型であるので，ある $f \in H^0(\mathcal{O}_{G\times X}^*)$ に関して

$$\Sigma(g, x, z) = (g \cdot x, f(g, x) \cdot z)$$

とかける．補題 7.5 より，ある $\chi \in \widehat{G}$ と $f' \in H^0(\mathcal{O}_X^*)$ が存在して $f(g, x) = \chi(g)f'(x)$ とかけるが，ここで任意の $x \in X$ に対して $f(e_G, x) = f'(x) = 1$ であるから，$f(g, x) = \chi(g)$ となり主張が得られる． ■

指標 $\chi \in \widehat{G}$ に対して，補題 7.6 で対応する G-linearization を定めた自明直線束を $\mathcal{O}_X(\chi)$ で表すことにする．定義から，$\mathcal{O}_X(-\chi) \simeq \mathcal{O}_X(\chi)^{-1}$ および $\mathcal{O}_X(\chi) \otimes \mathcal{O}_X(\delta) \simeq \mathcal{O}_X(\chi + \delta)$ が成り立つ．

補題 7.7　$\chi, \delta \in \widehat{G}$ に対して，G-linearized invertible sheaves $\mathcal{O}_X(\chi), \mathcal{O}_X(\delta)$ が同型であるための必要十分条件は，ある $f \in H^0(\mathcal{O}_X^*)$ に対して $\chi - \delta = \chi(f)$ が成り立つことである． □

証明　$F : \mathcal{O}_X(\chi) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X(\delta)$ を G-linearized invertible shaeves の同型とする．このとき，F は自明な可逆層の同型でもあるので，対応する $f \in H^0(\mathcal{O}_X^*)$ が存在する．補題 7.5 より，$f(g \cdot x) = \chi(f)(g) \cdot f(x)$ となる．

$$\begin{aligned}
(g \cdot x, \delta(g)f(x)z) &= g \cdot (x, f(z)) \\
&= g \cdot F(x, z) \\
&= F(g \cdot (x, z)) \\
&= F(g \cdot x, \chi(g)z) \\
&= (g \cdot x, f(g, x)\chi(g)z) \\
&= (g \cdot x, \chi(f)(g) \cdot f(x) \cdot \chi(g) \cdot z)
\end{aligned}$$

が任意の $g \in G, x \in X$ で成り立つから，$\delta(g) = \chi(f)(g) \cdot \chi(g)$，すなわち $\chi - \delta = \chi(f)$ である．逆向きの主張は，議論を逆に辿ることで従う． ■

定理 7.8　G を連結代数群とし，X を G が作用する既約な代数多様体とする．このとき，次の完全列

$$0 \to H^0(\mathcal{O}_X^*)^G \to H^0(\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{\chi} \widehat{G} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Pic}^G(X) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sigma^* - p_2^*} \mathrm{Pic}(G \times X)$$

が存在する． □

証明　$H^0(\mathcal{O}_X^*)$ における完全性は補題 7.5 からよい．$\widehat{G}$ における完全性は補題 7.7 から，$\mathrm{Pic}^G(X)$ における完全性は補題 7.6 から従う．$\mathrm{Pic}(X)$ における完全性は G-linearization の定義から明らかである． ■

補題 7.9　定理 7.8 と同じ記号のもとで，完全列における $\sigma^* - p_2^* : \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(G \times X)$ は

$$\psi : \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(G \times X)/p_2^*\mathrm{Pic}(X), \quad L \longmapsto \sigma^*(L) \bmod p_2^*\mathrm{Pic}(X)$$

に取り替えられる． □

証明 $e_G \times 1_X : X \to G \times X,\ \ x \mapsto (e_G, X)$ を考える．このとき，$\sigma \circ (e_G \times 1_X) = p_2 \circ (e_G \times 1_X) = 1_X$ である．よって，$(e_G \times 1_X)^* \circ (\sigma^* - p_2^*) = 0$ である．$e_G \times 1_X$ は p_2 の section であるから，補題の主張が従う． ■

主ファイバー束の条件を強めたものを，G-torsor という：

定義 7.10（G-torsor） G を代数群，X を G が作用する代数的スキーム，$f : X \to Y$ を代数的スキームの間の射とする．f が次の条件を満たすとき，**G-torsor** であるという．

(i) f は G 不変である．
(ii) f は faithfully flat である．
(iii) 射 $\Psi = (\sigma, p_2) : G \times X \to X \times_Y X$ は同型である． □

k 上のスキーム X に対し，$U(X) := H^0(\mathcal{O}_X^*)/k^*$ で定める．補題 7.5 より代数群 G に対しては $U(G) \simeq \widehat{G}$ である．また，滑らかな固有多様体 X に対しては，$U(X) = 0$ である．

補題 7.11 G を代数群とし，$f : X \to Y$ を G-torsor とする．

(i) f による引き戻しは同型 $U(Y) \simeq U(X)^G$ および $\mathrm{Pic}(Y) \simeq \mathrm{Pic}^G(X)$ を与える．
(ii) G が連結で X が既約のとき，完全列

$$0 \to U(Y) \to U(X) \to \widehat{G} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Pic}(G \times X)/p_2^*\mathrm{Pic}(X)$$

が存在する．

証明 (i) は SGA1 Chap.VIII の decent より従う．(ii) は (i) および定理 7.8 と補題 7.9 により従う． ■

定理 7.12（Chevalley） G を連結線型代数群とする．このとき，G は多様体として有理的で，Picard 群 $\mathrm{Pic}(G)$ は有限群になる． □

証明 $B \subset G$ を Borel 部分群とする．B-torsor $G \to G/B$ は local には section を持つ（[Bo91] Corollary 15.8.）ので，G は $B \times G/B$ と双有理同値である．さらに，B は $\mathbb{A}^1$ たちと $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ たちの直積多様体になっているので有理的で，Bruhat 分解（[Bo91] Theorem 14.12.）より，G/B は有理的である．従って，G も有理的である．

後半の主張を示そう．B-torsor $G \to G/B$ に補題 7.11 を用いる．$U(G) \simeq \widehat{G}$ であり，G/B は滑らかな射影代数多様体なので $U(G/B) = 0$ である．よって完全列

$$0 \to \widehat{G} \to \widehat{B} \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Pic}(G/B) \to \mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(B \times G)/p_2^*\mathrm{Pic}(G)$$

を得る．G は滑らかな多様体なので，[Ha77] Chap.II, Proposition 6.6. より引き戻し写像 $\mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(G \times \mathbb{A}^1)$ は同型である．また，同書の Proposition 6.5.(c) より制限写像 $\mathrm{Pic}(G \times \mathbb{A}^1) \to \mathrm{Pic}(G \times (\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}))$ は全射である．B は多様体として $\mathbb{A}^1$ たちと $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ たちの直積多様体と同型であるから，先ほどの写像を合成していくことで，$p_2^* : \mathrm{Pic}(G) \to \mathrm{Pic}(B \times G)$ が全射であることが従う[*46]．従って，$\mathrm{Pic}(B \times G)/p_2^*\mathrm{Pic}(G) = 0$ であり，$\mathrm{Pic}(G) = \mathrm{Coker}(\gamma)$ である．

[*46] 実はこれは同型になるが，ここではその事実は用いないので省略する．

$R(G)$ を G の radical，すなわち連結可解閉正規部分群のうち最大のものとする．このとき，$G' := G/R(G)$ は半単純である．$R(G) \subset B$ であり，従って B は G' のある Borel 部分群 $B' \subset G$ の引き戻しであるから，$G/B \simeq G'/B'$ が成り立ち，γ は $\gamma' : \widehat{B} \to \mathrm{Pic}(G'/B')$ を経由する．従って，G が半単純群であると仮定してよい．このとき，$\widehat{G} = \{0\}$ であり，完全列から $\widehat{B} \subset \mathrm{Pic}(G/B)$ である．さらに，群 $\widehat{B}$ の rank は G の rank に一致するので，これを r とする．従って，$\mathrm{Pic}(G/B)$ が r 個の元で生成されることを証明すればよい．これは再び Bruhat 分解から従う．G/B はアフィン空間に同型な Bruhat cell をもち，その補集合は r 個の既約な因子からなっている． ■