■**Fogarty の論文 [Fo83] の解説**　Fogarty による 1983 年の論文，Geometric quotients are algebraic schemes [Fo83] を解説する．Mumford は代数的スキーム $X$ の geometric quotiet $Y$ が代数的スキームであることを，定理 2.14 の証明の中で次数付き環のトリックを用いることで GIT の枠組みの中に実際に現れる geometric quotient についてのみ証明した．一般の場合にも $X$ が代数的スキームの場合に $Y$ が代数的スキームであることは期待こそされていたが，GIT の初版が出版された 1965 年以降 18 年にわたって未解決なままであった．これを初めて証明したのが Fogarty の 1983 年の仕事である．

$X, Y$ を $S$ スキーム，$G$ を $S$ 上の群スキームとする．

**定義 7.13（orbit space）**　$X$ を $G$ の作用をもつ多様体，$\phi : X \to Y$ を $G$ 不変な $S$ 射とする．$(Y, \phi)$ は次の条件を満たすとき，$X$ の $G$ 作用による **orbit space** であるという．

(i)　$\phi$ の幾何学的ファイバーは $X$ の幾何学的点の軌道になっている．
(ii)　$\phi$ は submersive である．

さらに，$\phi$ が universally submersive であるとき $(Y, \phi)$ は **universally orbit space** であるという．また，$\mathcal{O}_Y \to \phi_* \mathcal{O}_X$ が単射であるとき $(Y, \phi)$ は **strict orbit space** であるという．　□

**注意 7.14**　orbit space $(Y, \phi)$ が $\mathcal{O}_Y \simeq (\phi_* \mathcal{O}_X)^G$ を満たせば，geometric quotient である．　□

**命題 7.15**　$G$ を $S$ 上の群スキームでファイバーが幾何学的連結であるもの，$(Y, \phi)$ を $X$ の $G$ 作用による orbit space とする．このとき，次が成り立つ：

(i)　$I := \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_Y \to \phi_* \mathcal{O}_X)$ とする．このとき，$I$ は $Y$ 上ののべき零なイデアル層である．
(ii)　$Y^0$ を $I$ に対応する $Y$ の閉部分スキームとする．このとき，$\phi$ は $Y^0$ を経由し，$(Y^0, \phi)$ は strict orbit space になる．
(iii)　$X/G := \mathrm{Spec}_Y (\phi_* \mathcal{O}_X)^G$ とする．このとき，標準的な $G$ 不変射 $\psi : X \to X/G$ が存在する．
(iv)　$(Y, \phi)$ が universal orbit space のとき，$(X/G, \psi)$ は geometric quotient であり，構造射 $\eta : X/G \to Y$ は universal homeomorphism である．　□

**証明**　(i) は $\phi$ が全射で特に支配的なので，各局所環の間準同型の核がべき零根基に含まれるのでよい．(ii), (iii) は構成から明らか．

(iv) を示す．$X' := X \times_Y (X/G)$ と定め，次の図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "(1_X,\psi)"'] \arrow[rr, bend left, "1_X"] \arrow[dr, "\psi"'] & X' \arrow[r, "\xi"'] \arrow[d, "\phi'"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\
& X/G \arrow[r, "\eta"'] & Y
\end{tikzcd}$$

を考える．ここで，$\phi' = \psi \circ \xi$ とは限らないので注意しよう．$(1_X, \psi)$ は $G$ 線型な閉埋め込みであることから，その像 $X_1 \subset X$ は $G$ 不変な部分スキームである．$\phi'$ の閉ファイバーは $X'$ の $G$ 軌道であるから，$X_1$ と共通部分を持つ $\phi'$ の閉ファイバーは $X_1$ に含まれる．よって，$X_1 = \phi'^{-1}(\phi'(X_1))$ である．ここで，$\phi$ が universally submersive であるので $\phi'$ は submersive であるから，$\phi'(X_1) = \psi'((1, \psi)(X)) = \psi(X)$ は $X/G$ の閉集合である．構成から $\psi$ は支配的であったので，結果として $\psi$ が全射であることが分かった．

$X$ 上の $G$ 不変な関数は $\psi$ の幾何学的ファイバー上では一定の値をとる，すなわち $\psi$ の幾何学的ファイ

バー $X_y$ は $\phi$ の幾何学的ファイバー $X_{\eta(y)}$ と一致するので，$\eta$ は幾何学的単射である．$\phi = \eta \circ \psi$ であるから，$\eta$ は全単射である．加えて，$Z = \psi^{-1}(\psi(Z))$ となる $X$ の部分集合 $Z$ に対して，$Z_1 := (1, \psi)(Z)$ は $Z_1 = \phi'^{-1}(\phi'(Z_1))$ を満たす．．この $Z = \psi^{-1}(\psi(Z))$ が $X$ の閉集合であるとき，$Z_1 = \phi'^{-1}(\phi'(Z_1))$ は $X'$ の閉集合であるので，$\psi$ が submersive であることから $\phi'(Z_1) = \psi(Z)$ は $X/G$ の閉集合である．したがって，$\psi$ は submersive である．

$U \subset X/G$ を開集合とする．$\eta$ が全単射であるから，$\phi^{-1}(\eta(U)) = \psi^{-1}(U)$ である．$\phi$ は submersive であるから，$\eta(U)$ は $Y$ の開集合．したがって，$\eta$ は同相である．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\
X/G \arrow[r, "\eta"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$\eta$ が universal homeomerphism であることを示そう．基底変換 $Y' \to Y$ に対して次の図式

$$\begin{tikzcd}
 & X' \arrow[dl, "\phi'"'] \arrow[d, "\psi'"] \arrow[dr, "\lambda"] & \\
Y' & (X/G)' \arrow[l, "\eta'"'] & X'/G \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

を考える．$(Y', \phi')$ および $((X/G)', \psi')$ が orbit space なので，これまでの議論から$\alpha$ および $\eta' \circ \alpha$ は同相であり，したがって $\eta'$ も同相である．

最後に，$((X/G), \psi)$ が geometric quotient であることを示す．geometric quotient の定義の (i), (ii), (iii) はすでに確かめたので，条件の (iv) に当たる $\mathcal{O}_{X/G} \to (\psi_* \mathcal{O}_X)^G$ が同型であることを示そう．$\eta$ が同相かつ $G$ 線型なので，

$$\begin{aligned}
\Gamma(U, \mathcal{O}_{X/G}) &= \Gamma(\eta(U), \eta_* \mathcal{O}_{X/G}) \\
&= \Gamma(\eta(U), (\phi_* \mathcal{O}_{X/G})^G) \\
&= \Gamma(\phi^{-1}(\eta(U)), \mathcal{O}_X)^G \\
&= \Gamma(\psi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)^G \\
&= \Gamma(U, (\psi_* \mathcal{O}_X)^G)
\end{aligned}$$

となり，結果として求めていた同型が得られた． ■

**注意 7.16**　$G$ が連結な幾何学的ファイバーを持ち，$X$ がネーター的な底位相空間をもち，$(Y, \phi)$ が $X$ の $G$ 作用による orbit space であるとする．このとき，既約閉集合 $W \subset Y$ に対して，$\phi^{-1}(W)$ も既約である． □

**注意 7.17**　$\phi \colon X \to Y$ が orbit space で，$Y$ がアフィンのとき，$X/G = \operatorname{Spec} H^0(X, \mathcal{O}_X)^G$ である． □

**定理 7.18（[Fo83] の主定理）**　$S$ を excellent なスキーム，$G$ を $S$ 上有限型で幾何学的連結なファイバーを持つ群スキーム，$X$ を $G$ が作用する $S$ 上有限型なスキームとする．このとき，$(Y, \phi)$ を $X$ の $G$ 作用による strict orbit space であるとすると，$Y$ も $S$ 上有限型である．さらに，$\mathcal{F}$ を $G$-linearied coherent $\mathcal{O}_X$-module とすると，$\mathcal{F}^G$ は coherent $\mathcal{O}_Y$-module である． □

**系 7.19**　$X$ が $k$ 上の代数的スキームであり，$k$ 上の代数群 $G$ が作用しているとする．このとき，$(Y, \phi)$ を $X$ の $G$ による geometric quotient とすると，$Y$ も $k$ 上の代数的スキームである． □