GL, SL の表現論

@waheyhey

2015 年 7 月

目次

1 序

1.1 ねらい

代数幾何で具体的な対象を取り扱っていると，しばしば代数群の作用が存在するような状況に出会う（等質多様体や商多様体など）．その様な状況下では，多様体のさまざまな幾何が作用している代数群の表現論でコントロールされる．このノートでは，そういった状況に出会った代数幾何専攻の学生のために，出来るだけ具体的な状況へ応用しやすいように，なるべく明示的に代数群の表現論にまつわる諸概念を書き下すことを目的とする．なかんずく，一般線形群 GL_n と特殊線形群 SL_n の表現論（おまけで特殊直交群 SO_n とシンプレクティック群 Sp_{2n} の表現論）を中心に扱い，これらのワイル群，ウエイト格子，ルート系，支配ウエイト，既

約表現などを可能な限り具体的に書き下す．

このノートを書く上では，これらの具体例について詳しく理解することが後に一般論を勉強する上での潤滑油になることも期待しつつ，勉強している．

基本的な代数幾何学や群の表現論の基礎事項（表現の定義，Schur の補題など）は既知であるとし，これらの事項に関する復習はしない．

このノートの著者は大変いいかげんな人間なので，誤植や数学的な誤りはたくさんあると思われる．見つけたらやさしく教えていただけると大変ありがたいです．

1.2　記号と用語

このノートでの基礎体は常に $\mathbb{C}$ とする．

- $\mathbb{U}_N := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_N$ ：対角成分がすべて 1 な上三角行列全体からなる GL_N の極大冪等部分群
- $\mathbb{U}_N^- := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ * & \ddots & \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_N.$ ：対角成分がすべて 1 な下三角行列全体からなる GL_N の極大冪等部分群

2　古典代数群とその構造

2.1　古典代数群

まず，このノートで主役になって登場する群を定義する．V を有限次元ベクトル空間とし，一般線形群と特殊線形群

$$\mathrm{GL}(V) := \{F \in \mathrm{End}(V) \mid F \text{ は全単射 }\}$$
$$\mathrm{SL}(V) := \{F \in \mathrm{End}(V) \mid \det(F) = 1\}$$

はいつもの通りである．$V = \mathbb{C}^n$ のときは，

$$\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_n,$$
$$\mathrm{SL}(V) = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{SL}_n$$

などとも表す．次に，直交群とシンプレクティック群を定義する．

$$J_N^+ = J_N := \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C})$$
$$J_{2n}^- := \begin{pmatrix} O & J_n^+ \\ -J_n^+ & O \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

とおき，これを用いて N 次直交群

$$\mathrm{O}_N = \mathrm{O}_N(\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}_N \mid {}^tAJ_N^+A = J_N^+\},$$

N 次特殊直交群

$$\mathrm{SO}_N := \mathrm{O}_N \cap \mathrm{SL}_N$$

ならびに $2n$ 次シンプレクティック群

$$\mathrm{Sp}_{2n} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{GL}_{2n} \mid {}^tAJ_{2n}^-A = J_{2n}^-\}$$

を定義する．これらはすべて多項式で定義されるので，アフィン代数多様体である．

注意 2.1　直交群の元 $A \in \mathrm{O}_N$ を考える．定義の式 ${}^tAJ_N^+A = J_N^+$ の両辺の行列式をとることで, $\det(A) = \pm 1$ が分かる．すなわち，代数多様体の射 $\det : \mathrm{O}_N \to \mathbb{C}$ の像は 2 点からなる集合 $\{\pm 1\}$ であり，特に連結でない．よって，O_N も連結ではない．$\mathrm{GL}_N, \mathrm{SL}_N, \mathrm{SO}_N, \mathrm{Sp}_{2n}$ は連結な代数群であることが知られている．

例 2.2　(1)　$\mathrm{O}_1 = \{\pm 1\}, \mathrm{SO}_1 = \{1\}$ である．

(2)　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2$ に対して

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ac & ad+bc \\ ad+bc & 2bd \end{pmatrix}$$

なので，$A \in \mathrm{O}_2$ ならば，$a = d = 0$ または $b = c = 0$ である．よって，

$$\mathrm{O}_2 = \left\{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C}^*\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} 0 & s \\ s^{-1} & 0 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{C}^*\right\}$$

となる．また，

$$\mathrm{SO}_2 = \left\{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{C}^*\right\}$$

である．

(3)　$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2$ に対して

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ad-bc \\ -ad+bc & 0 \end{pmatrix}$$

なので，

$$\mathrm{Sp}_2 = \mathrm{SL}_2$$

である．これは 2 次元 Gorenstein 標準特異点と 2 次元シンプレクティック特異点が同じクラスであるという事実と関係する．

注意 2.3　$J \in \mathrm{GL}_N$ を用いて，

$$\sigma_J : \mathrm{GL}_N \to \mathrm{GL}_N,\ X \mapsto J^{-1}({}^tX)^{-1}J$$

と定義する．これは GL_N の代数群としての自己同型である．

$$\sigma_J(X) = X \iff J^{-1}({}^tX)^{-1}J = X \iff {}^tXJX = J$$

であるので，

$$\mathrm{GL}_N{}^{\sigma_J} := \{X \in \mathrm{GL}_N \mid \sigma_J(X) = X\} = \{X \in \mathrm{GL}_N \mid {}^tXJX = J\}$$

となる．よって $\sigma^+ := \sigma_{J_N^+}, \sigma^- := \sigma_{J_{2n}^-}$ とすると，

$$\mathrm{GL}_N{}^{\sigma^+} = \mathrm{O}_N,\ \mathrm{GL}_{2n}{}^{\sigma^-} = \mathrm{Sp}_{2n}$$

となる．

2.2 ワイル群

G を群，$T \subset G$ を可換な部分群とする．このとき，

$$N_G(T) := \{g \in G \mid gTg^{-1} = T\}$$

と定義し，T の正規化部分群 (normalizer subgroup) と呼ぶのであった．T は $N_G(T)$ に正規部分群として含まれる．また，$N_G(T)$ は T に，

$$n \cdot t := ntn^{-1},\ (n \in N_G(T), t \in T)$$

によって作用する．このとき，

$$W = W(G,T) := N_G(T)/T$$

と定義し，$W = W(G,T)$ を（G の T に関する）**ワイル群 (Weyl group)** という．ワイル群の要素 $w \in W$ のリフトのひとつを $n_w \in N_G(T)$ として，

$$w \cdot t := \overline{n_w \cdot t \cdot n_w^{-1}},\ (t \in T)$$

と定義すると well-defined であり，これによってワイル群 W は T に作用する．

さて，我々の状況（古典代数群）に戻る．$G \subset \mathrm{GL}_N$ を $\mathrm{GL}_N, \mathrm{SL}_N, \mathrm{O}_N, \mathrm{SO}_N, \mathrm{Sp}_{2n}$ のいずれかとする．まず，GL_N に含まれる対角行列全体のなす可換部分群

$$\mathbb{T}_N := \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & d_N \end{pmatrix} \mid d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{C}^* \right\}$$

を考える．以下では，G の $T := \mathbb{T}_N \cap G$ に関するワイル群を具体的に書き下す．

対称群の要素 $w \in \mathfrak{S}_N$ に対して，

$$P_w := (\delta_{i,w(j)})_{i,j} \in \mathbb{M}_N(\mathbb{C})$$

と定義し，P_w を w に対応する置換行列 (permutation matrix) と呼ぶ．簡単に確かめられるように

$$P_w P_{w'} = P_{ww'},\ (w, w' \in \mathfrak{S}_N)$$

であるので，対応 $\mathfrak{S}_N \ni w \mapsto P_w \in \mathrm{GL}_N$ は群準同型である．

置換行列 P_w と対角行列 $\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{pmatrix} \in \mathbb{T}_N$ に対して，

$$A = P_w \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{pmatrix}$$

の形で書ける行列 A を単項式行列 (monomial matrix) と呼ぶ.

$$P_w \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{pmatrix} (P_w)^{-1} = \begin{pmatrix} d_{w^{-1}(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{w^{-1}(N)} \end{pmatrix}$$

となるので，単項式行列全体は $N_{\mathrm{GL}_N}(\mathbb{T}_N)$ の部分集合である.

命題 2.4　$G \subset \mathrm{GL}_N$ を古典代数群とし，$T = \mathbb{T}_N \cap G$ とおく．このとき，$A \in N_G(T)$ ならば A は単項式行列である.

証明　準同型

$$\varepsilon_i : T \ni \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{pmatrix} \mapsto d_i \in \mathbb{C}^*$$

を考える．$e_1, \ldots, e_N \in \mathbb{C}^N$ を $\mathbb{C}^N$ の標準基底とすると,

$$De_i = \varepsilon_i(D)e_i$$

が任意の $D \in T$ と $1 \leq i \leq N$ について成り立つ．0 でないベクトル $v \in \mathbb{C}^N$ であって，任意の $D \in T$ に対し $Dv = \chi(D)v$, $(\chi(D) \in \mathbb{C}^*)$ となるもの（すなわち T の同時固有ベクトル）を考える．$v = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i$ と表すと,

$$\begin{aligned} Dv &= \sum_{i=1}^N \alpha_i De_i = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varepsilon(D) e_i \\ &= \chi(D)v = \sum_{i=1}^N \alpha_i \chi(D) e_i \end{aligned}$$

と書けるので各 i について，任意の $D \in T$ に対して $\varepsilon_i(D) = \chi(D)$ となるか，$\alpha_i = 0$ のいずれかが成り立つ．しかし，$i \neq j$ ならば $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$ であることより，$\alpha_i \neq 0$ なる i は $1 \leq i \leq N$ の範囲で唯 1 つ存在し，$v = \alpha_i e_i$ と書けることが分かった.

$A \in N_G(T)$ をとる．このとき,

$$\begin{aligned} D(Ae_i) &= A(A^{-1}DA)e_i \\ &= \varepsilon_i(A^{-1}DA)Ae_i \end{aligned}$$

となるので，Ae_i も T の同時固有ベクトルである．したがって，先ほどの議論から，ある $w(i) \in \{1, \ldots, N\}$ と $\alpha_i \in \mathbb{C}^*$ が存在して

$$Ae_i = \alpha_i e_{w(i)}$$

となる．A は可逆行列なので，$\{e_{w(i)} \mid 1 \leq i \leq N\}$ は再び $\mathbb{C}$ 基底になるから，$i \neq j$ なら $w(i) \neq w(j)$ であることが分かる．よって，$w \in \mathfrak{S}$ であることが従い，さらに

$$A = P_w \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_N \end{pmatrix}$$

であることが分かる.　■

準同型写像

$$\pi : N_G(T) \ni A = P_w \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_N \end{pmatrix} \mapsto w \in \mathfrak{S}_N$$

を考える．明らかに $\operatorname{Ker}\pi = G \cap \mathbb{T}_N = T$ となるから，単射

$$\overline{\pi} : W(G,T) = N_G(T) \hookrightarrow \mathfrak{S}_N$$

を得る．対称群の要素 $w \in \mathfrak{S}_N$ に対応する置換行列 P_w の行列式は $\det P_w = \pm 1$ である．よって，適当な対角行列 $D \in \mathbb{T}_N$ に対して $A = P_w D \in \mathrm{SL}_N$ とすることができる．したがって，$G = \mathrm{GL}_N$ または SL_N のときは，準同型 $\pi : N_G(T) \to \mathfrak{S}_N$ は全射である．以上から，次のことが分かった．

定理 2.5　$G = \mathrm{GL}_N$ または SL_N とし，$T = G \cap \mathbb{T}_N$ とする．このとき，

$$W(G,T) = \mathfrak{S}_N$$

であり，$W(G,T)$ は T に

$$w \cdot \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_N) = \operatorname{diag}(d_{w^{-1}(1)}, \ldots, d_{w^{-1}(N)})$$

によって作用する．

他の古典代数群の場合，π は一般に全射ではなく，ワイル群の構造はもう少し複雑である．尚且つ，新しい現象として SO_{2n+1} と SO_{2n} の差がここから現れてくる．まずはこのことを観察しよう．

$G = \mathrm{O}_{2n+1}, \mathrm{SO}_{2n+1}, \mathrm{O}_{2n}, \mathrm{SO}_{2n}$ のいずれかであるとする．まず，

$$w_0 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots N-1 & N \\ N & N-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

とすると，$J_N^+ = P_{w_0}$ となる．定義より，$w \in \mathfrak{S}_N$ に関して $P_w \in N_{\mathrm{O}_N}(T)$ となるには ${}^tP_w J_N^+ P_w = J_N^+$ となることが必要十分であるが，${}^tP_w = P_{w^{-1}}$ であることに注意すれば，これは $ww_0 = w_0 w$ となることと同値である．したがって，

$$W_N := \{w \in \mathfrak{S}_N \mid ww_0 = w_0 w\}$$

と定義すれば単射

$$\overline{\pi} : W(G,T) \hookrightarrow W_N$$

を得る．

ここで，W_N について少し考える．$N = 2n+1$ のとき，$w_0(n+1) = n+1$ であることに注意すれば，$w \in W_{2n+1}$ に関して

$$w(n+1) = w(w_0(n+1)) = w_0(w(n+1))$$

となる．よって $w(n+1)$ も w_0 で固定されるが，そのような元は $n+1$ しかないので $w(n+1) = n+1$ を得る．したがって，$n+1$ を間引いて考えることで同型

$$W_{2n+1} \simeq W_{2n}$$

を得る．

定理 2.6　以下の場合，ワイル群はそれぞれ次のようになる．

(1)　$G = \mathrm{O}_{2n+1}, \mathrm{SO}_{2n+1}, \mathrm{Sp}_{2n}$ のとき，超八面体群

$$W(G,T) \simeq \mathcal{H}_n := (\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n.$$

(2)　$G = \mathrm{O}_{2n}, \mathrm{SO}_{2n}$ のとき，

$$W(G,T) \simeq \mathcal{H}_n^\circ := \{(t_1, \ldots, t_n; w) \in (\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n \mid t_1 \cdots t_n = 1\} \subset (\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n.$$

（特殊）直交群のワイル群が次数の偶奇で変わること，ならびに奇数次の（特殊）直交群とシンプレクティック群のワイル群が同型になることは，これらの群に対応するディンキン図形の型と関係がある．

2.3　ボレル部分群とガウス分解

GL_n の部分群を

$$\mathbb{B}_n := \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ & \ddots & * \\ O & & * \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_n,$$

$$\mathbb{B}_n^- := \left\{ \begin{pmatrix} * & & O \\ * & \ddots & \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_n,$$

$$\mathbb{U}_n := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & \ddots & * \\ O & & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_n,$$

$$\mathbb{U}_n^- := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & O \\ * & \ddots & \\ * & * & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_n$$

などと定義する．$\mathbb{B}_n$ は可逆上三角行列全体，$\mathbb{B}_n^-$ は可逆下三角行列全体，$\mathbb{U}_n$ は上三角行列で対角成分がすべて 1 なる行列全体，$\mathbb{U}_n^-$ は下三角行列で対角成分がすべて 1 なる行列全体である．$\mathbb{B}_n$ と $\mathbb{B}_n^-$ を GL_n の **ボレル部分群 (Borel subgroup)**，$\mathbb{U}_n$ と $\mathbb{U}_n^-$ を GL_n の **極大冪等部分群 (maximal unipotent subgroup)** という．$\mathbb{B}_n$ は GL_n の部分群であり，$\mathbb{U}_n$ は $\mathbb{B}_n$ の正規部分群である．

注意 2.7　正しくは，連結線形代数群 G に対して，その部分群 $B \subset G$ がボレル部分群であるとは，B が極大連結可解閉部分群であることを指す．一般にボレル部分群は一意的ではない．$\mathbb{B}_n$, $\mathbb{B}_n^-$ は GL_n のボレル部分群の例である．

さらに，ふたつのボレル部分群は互いに共役になることが知られている．たとえば今の例では，$J_n^+ \, \mathbb{B}_n \, J_n^+ = \mathbb{B}_n^-$ である．

さて，$\sigma = \sigma^\pm \in \mathrm{Aut}(\mathrm{GL}_N)$ に対して，${\mathrm{GL}_N}^{\sigma^+} = \mathrm{O}_N$, ${\mathrm{GL}_{2n}}^{\sigma^-} = \mathrm{Sp}_{2n}$ だったことを思い出そう．計算により，$\sigma(\mathbb{B}_N) \subset \mathbb{B}_N$, $\sigma(\mathbb{U}_N) \subset \mathbb{U}_N$, $\sigma(\mathbb{T}_N) \subset \mathbb{T}_N$ であることが分かる．

命題 2.8　$G = \mathrm{GL}_N, \mathrm{SL}_N, \mathrm{O}_N, \mathrm{SO}_N, \mathrm{Sp}_{2n}$ に対し，$B := G \cap \mathbb{B}_N$, $U := G \cap \mathbb{U}_N$, $T = \mathbb{T}_N$ とする．

(1)　B は G の部分群である．

(2) U は B の正規部分群である．

(3) 任意の $A \in B$ に対し，$D \in T$ と $C \in U$ が一意に存在して $A = DC$ と書ける．特に，同型 $B \simeq T \ltimes U$ が成り立つ．

注意 2.9 B は G のボレル部分群である．

次に，ガウス分解定理について論じる．

$A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n} \in \mathbb{M}_{m,n}$ を $m \times n$ 行列とする．このとき，

$$A_{[k],[k]} := (a_{ij})_{1 \le i \le k, 1 \le j \le k} \in \mathbb{M}_k(\mathbb{C})$$

と定義する．また

$$\mathbb{T}_{m,n} := \{A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m,n} \mid a_{ij} = 0 \text{ for } i \neq j\}$$

とおく．

命題 2.10（ガウス分解） $A \in \mathbb{M}_{m,n}$ とし，$1 \le k \le \min\{m, n\}$ なる任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$D_k(A) := \det A_{[k],[k]} \neq 0$ であると仮定する．このとき，$B \in \mathbb{U}_m^-$，$D \in \mathbb{T}_{m,n}$，$C \in \mathbb{U}_n$ が存在して，

$$A = BDC$$

と書ける．さらに，D は

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & & O \\ & \ddots & & \\ & & d_{ii} & \\ O & & & \ddots \end{pmatrix}, \ d_{ii} = D_i(A)/D_{i-1}(A)$$

と選べる（ここで，$D_0(A) = 1$ とした）．

証明 転置を考えることで，$m \le n$ であると仮定してよい．$m = 1$ であるときは明らか．以下，帰納法で示す．$a_{11} = D_1(A) \neq 0$ であることに注意して，正方行列

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21}a_{11}^{-1} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}a_{11}^{-1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_m(\mathbb{C}),\ C' = \begin{pmatrix} 1 & a_{12}a_{11}^{-1} & \cdots & a_{1n}a_{11}^{-1} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$$

を考える．このとき，

$$(B')^{-1}A(C')^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right),\ A_1 \in \mathbb{M}_{m-1,n-1}$$

の形になる．$(B')^{-1}$ は下三角，$(C')^{-1}$ は上三角行列なので，

$$((B')^{-1}A(C')^{-1})_{[k],[k]} = ((B')^{-1})_{[k],[k]}A_{[k],[k]}((C')^{-1})_{[k],[k]} = \det A_{[k],[k]}$$

となるから，

$$\begin{aligned}\det(A_{[k],[k]}) &= \det((B')^{-1}A(C')^{-1})_{[k],[k]} \\ &= a_{11}\det((A_1)_{[k-1],[k-1]})\end{aligned}$$

が成り立つ．したがって，任意の $1 \le k \le m-1$ に対して $D_k(A_1) \neq 0$ となるから，帰納法の仮定より $B_1 \in \mathbb{U}_{m-1}^-$, $D_1 = (d'_{ij}) \in \mathbb{T}_{m-1,n-1}$, $C_1 \in \mathbb{U}_{m-1}$ が存在して

$$A_1 = B_1 D_1 C_1$$

かつ

$$d_{ii} = D_i(A_1)/D_{i-1}(A) = \frac{\frac{1}{a_{11}}D_{i+1}(A)}{\frac{1}{a_{11}}D_i(A)} = D_{i+1}(A)/D_i(A)$$

となるものが存在する．あとは

$$B := B'\begin{pmatrix} 1 & o \\ o & B_1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} a_{11} & o \\ o & D_1 \end{pmatrix},\ C = C'\begin{pmatrix} 1 & o \\ o & C_1 \end{pmatrix}$$

とすればよい． ■

定理 2.11（古典群のガウス分解） $G \subset \mathrm{GL}_N$ を古典代数群，$U^- := G \cap \mathbb{U}_N^-$, $T = G \cap \mathbb{T}_N$, $U^+ = G \cap \mathbb{U}_N$ とする．$A \in G$ が $1 \le k \le N$ なる任意の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $D_k(A) \neq 0$ が成り立つような元とする．このとき，$B \in U^-$, $D \in T$, $C \in U$ の三つ組であって，$A = BDC$ となるようなものが一意に存在する．

証明 まず一意性を示す．$B, B' \in U^-$, $D, D' \in T$, $C, C' \in U$ に関して，

$$A = BDC = B'D'C'$$

と表せたとする．このとき

$$(B')^{-1}B = (D'C')(DC)^{-1}$$

であり，左辺は $\mathbb{U}_N^-$，右辺は $\mathbb{B}_N$ の元である．$\mathbb{U}_N^- \cap \mathbb{B}_N = \{I_N\}$ なので，$B = B'$ かつ $DC = D'C'$ である．後者の等式から $D = D'$ かつ $C = C'$ が従う．

次に存在を示す．$G = \mathrm{GL}_N$ の場合はすでに示した．$G = \mathrm{SL}_N$ の場合を示す．$A \in \mathrm{SL}_N$ に GL_N の場合のガウス分解を適用することで，$B \in \mathbb{U}_N^-$, $D \in \mathbb{T}_N$, $C \in \mathbb{U}_N$ が存在して $A = BDC$ と表せる．$B, C \in \mathrm{SL}_N$ はよい．両辺の行列式を考えることで，$D \in \mathrm{SL}_N$ も従う．

$G = \mathrm{O}_N, \mathrm{SO}_N, \mathrm{Sp}_{2n}$ の場合の証明は省略する． ■

2.4 古典代数群の表現

2.4.1 正則表現

$g \in \mathbb{C}[G]$ に対して左移動 L_g と右移動 R_g と呼ばれる $\mathbb{C}[G]$ の線形変換を

$$(L_g f)(x) = f(g^{-1}x), \quad (R_g f)(x) = f(xg)$$

で定義する．これによって G の（無限次元の）表現

$$L : G \ni g \mapsto L_g \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}[G]), \quad R : G \ni g \mapsto R_g \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}[G])$$

が得られる．これをそれぞれ G の **左正則表現 (left regular representation)**, **右正則表現 (right regular representation)** と呼ぶ．

3　Lie 代数とルート系

3.1　Lie 代数とルート系

G を古典代数群，$e \in G$ を単位元，$\mathbb{C}[G]$ を G のアフィン座標環とする．このとき，

$$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G) = \{v : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C} \mid v(fg) = v(f)g(e) + f(e)v(g)\}$$

と定義して，$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数という．$\mathfrak{g}$ の元を接ベクトルと呼ぶ．次の補題は定義から明らか．

補題 3.1　$\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[f_1, \ldots, f_r]$ であるとき，$\mathrm{Lie}(G)$ は線形空間として $v(f_1), \ldots, v(f_r)$ で生成される．

$A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ に対して，接ベクトルを

$$v_A : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C},\ f \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}}(I_n)$$

で定義する．これによって，

$$\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_n = \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n),\ A \mapsto v_A$$

が定まる．

命題 3.2　上の対応は同型 $\mathfrak{gl}_n := \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n) \simeq \mathbb{M}_n$ を与える．

証明　$v \in \mathfrak{gl}_n$ を取る．$\mathbb{C}[\mathrm{GL}_n] = \mathbb{C}[\{x_{ij}\}_{i,j}, \det^{-1}]$ であることを思い出そう．$0 = v(1) = v(\det \cdot \det^{-1}) = \det(I_n)v(\det^{-1}) + v(\det)\det^{-1}(I_n) = v(\det) + v(\det^{-1})$ なので，$v(\det^{-1}) = -v(\det)$ であることに注意．したがって，v は $v(x_{ij})$ $(1 \leq i, j \leq n)$ の値によって一意的に定まる．

$A = (a_{ij})_{ij}$ に対して $v_A(x_{ij}) = a_{ij}$ なので，対応 $A \mapsto v_A$ は単射である．また，$v \in \mathfrak{gl}_n$ に対して行列を $A = (v(x_{ij}))_{ij}$ と定義すれば $v_A = v$ なので，上記の対応は全射でもある．■

Lie 代数の括弧積を定義するために，$\mathrm{Lie}(G)$ と自然に同型な線形空間を導入する．

定義 3.3　線形写像 $D : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ が G 上の **ベクトル場** であるとは，任意の $f, g \in \mathbb{C}[G]$ に対して

$$D(fg) = D(f)g + fD(g)$$

が成り立つことである．ベクトル場はよく導分 (derivation) とも呼ばれる．G 上のベクトル場全体のなす線形空間を $\mathrm{Der}(\mathbb{C}[G])$ と定義する：

$$\mathrm{Der}(\mathbb{C}[G]) = \{D \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G]) \mid D(fg) = D(f)g + fD(g) \quad (\forall f, g \in \mathbb{C}[G])\}.$$

$X, Y \in \mathrm{Der}(\mathbb{C}[G])$ に対して，$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G])$ の中で

$$[X, Y] := XY - YX$$

と定義する（積は合成）．これは再びベクトル場になる．実際 $f, g \in \mathbb{C}[G]$ に対して

$$\begin{aligned}
[X, Y](fg) &= (XY - YX)(fg) \\
&= XY(fg) - YX(fg) \\
&= X(Y(f)g + fY(g)) - Y(X(f)g + fX(g)) \\
&= (XY)(f)g + Y(f)X(g) + X(f)Y(g) + f(XY)(g) - (YX)(f)g - X(f)Y(g) - Y(f)X(g) - f(YX)(g) \\
&= (XY - YX)(f)g + f(XY - YX)(g) \\
&= [X, Y](f)g + f[X, Y](g)
\end{aligned}$$

となる．括弧積の双線型性，歪対称性，ヤコビ律も簡単にわかり，$(\mathrm{Der}(\mathbb{C}[G]), [-, -])$ は普通の意味での Lie 代数になっていることが分かる．

左移動（resp. 右移動）を用いて G の $\mathrm{Der}(\mathbb{C}[G])$ への作用を定義する．$g \in G, X \in \mathrm{Der}(\mathbb{C}[G])$ に対して

$$g \cdot X := L_g X L_g^{-1} \text{ (resp. } g \cdot X := R_g X R_g^{-1})$$

と定義する．この作用に関する固定点を左不変なベクトル場（resp. 右不変なベクトル場）といい，左不変なベクトル場の全体を

$$L(G) := \{X \in \mathrm{Der}(\mathbb{C}[G]) \mid L_g X L_g^{-1} = X \ (\forall g \in G)\}$$

で表す．$L(G)$ は $\mathrm{Der}(\mathbb{C}[G])$ の線形部分空間であり，括弧積で閉じている（すなわち，$X, Y \in L(G)$ に対して $[X, Y] \in L(G)$ となる）．実際，$X, Y \in L(G)$ ならば $L_g XY L_g^{-1} = (L_g X L_g^{-1})(L_g Y L_g^{-1}) = XY$ となる．言い換えれば，$L(G)$ は $\mathrm{Der}(\mathbb{C}[G])$ の部分 Lie 代数である．

注意 3.4 $g, h, x \in G$ と $f \in \mathbb{C}[G]$ に対して $(L_g \circ R_h)(f)(x) = f(g^{-1}xh) = (R_h \circ L_g)(f)(x)$ となるので，$L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$ が成り立つ．したがって，$X \in L(G)$ と $g \in G$ に対して

$$\mathrm{Ad}(g)(X) := R_g X R_g^{-1}$$

と定義すると，$\mathrm{Ad}(g)(X) \in L(G)$ である．これによって表現

$$\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{GL}(L(G)),\ g \mapsto \mathrm{Ad}(g)$$

が定まる．

代数群 G の接ベクトル $v \in \mathrm{Lie}(G)$ と関数 $f \in \mathbb{C}[G]$ に対して新しい関数 $X_v f \in \mathbb{C}[G]$ を

$$(X_v f)(x) := v(L_{x^{-1}} f)$$

で定義する．対応

$$X_v : \mathbb{C}[G] \ni f \mapsto X_v f \in \mathbb{C}[G]$$

は線形写像であり，かつ $X_v \in L(G)$ であることも極簡単に分かる．

命題 3.5 代数群 G に対して写像

$$\mathrm{Lie}(G) \ni v \mapsto X_v \in L(G)$$

は線形同型であり，逆写像は

$$\theta : L(G) \ni D \mapsto [\theta(D) : \mathbb{C}[G] \ni f \mapsto (Df)(e) \in \mathbb{C}] \in \mathrm{Lie}(G)$$

で与えられる．

証明　$D \in L(G)$ に対して $\theta(D) \in \mathrm{Lie}(G)$ であることは明らか．$D \in L(G)$ と $f \in \mathbb{C}[G]$ に対して

$$(X_{\theta(D)}f)(x) = \theta(D)(L_{x^{-1}}f) = (D(L_{x^{-1}}f))(e) = (L_{x^{-1}}(Df))(e) = (Df)(x)$$

となるので，$X_{\theta(D)} = D$ である．一方，$v \in \mathrm{Lie}(G)$ に対して

$$\theta(X_v)(f) = (X_v f)(e) = v(L_{e^{-1}}f) = v(f)$$

より，$\theta(X_v) = v$ である． ■

命題 3.6　上の対応は以下の同型を与える．

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{gl}_n := \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}_n) \simeq \mathbb{M}_n,\\
&\mathfrak{sl}_n := \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_n) \simeq \{A \in \mathbb{M}_n \mid \mathrm{tr}(A) = 0\},\\
&\mathfrak{so}_n := \mathrm{Lie}(\mathrm{O}_n) = \mathrm{Lie}(\mathrm{SO}_n) \simeq \{A \in \mathbb{M}_n \mid {}^tAJ_n^+ + J_n^+A = 0\},\\
&\mathfrak{sp}_{2n} := \mathrm{Lie}(\mathrm{Sp}_{2n}) = \{A \in \mathbb{M}_{2n} \mid {}^tAJ_{2n}^- + J_{2n}^-A = 0\}.
\end{aligned}$$

$G \subset \mathrm{GL}_N$ を古典代数群とし，$\mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$, $T := G \cap \mathbb{T}_N$ とおく．このとき，

$$X(T) := \{\chi : T \to \mathbb{C}^* \mid \chi \text{ は代数群の準同型 }\}$$

を定義し，$X(T)$ を G の（T に関する）**ウエイト格子 (weight lattice)** と呼ぶ．$\chi \in X(T)$ に対して，

$$\mathfrak{g}(\chi) := \{X \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{Ad}(t)X = \chi(t)X \ (\forall t \in T)\}$$

とし，また

$$\mathfrak{t} := (\text{可逆とは限らない対角行列全体}) \cap \mathfrak{g}$$

と定義する．$\chi_0 : T \to \mathbb{C}^*$ を自明な準同型とすれば，

$$\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}(\chi_0) = \{X \in \mathfrak{g} \mid tXt^{-1} = X \text{ for all } t \in T\}$$

が成り立つ．

$\chi \in X(T)$ が $\mathfrak{g}$ の **ルート (root)** であるとは，$\chi \neq \chi_0$ かつ $\mathfrak{g}(\chi) \neq 0$ が成り立つことをいう．ルート χ に対して，$\mathfrak{g}(\chi)$ をその **ルート空間 (root space)**，ルート空間の非自明な元をルートベクトルと呼ぶ．また，

$$R := \{\chi \in X(T) \mid \chi \text{ は } \mathfrak{g} \text{ のルート }\}$$

と定め，R を $\mathfrak{g}$ に対応する**ルート系 (root system)** という．次のことが成り立つ．

命題 3.7

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}(\alpha)\right)$$

が成り立つ．

これを $\mathfrak{g}$ の **ルート空間分解 (root space decomposition)** と呼ぶ．

例 3.8　随伴表現

$$\mathrm{Ad} : \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}(\mathfrak{gl}_n),\ g \mapsto [\mathrm{Ad}(g) : X \mapsto gXg^{-1}]$$

によって，GL_n は $\mathfrak{gl}_n$ に作用する．よって，この作用を $\mathbb{T}_n$ に制限することで，$\mathbb{T}_n$ の $\mathfrak{gl}_n$ への作用を考えることができる．E_{ij} を (i,j)-行列単位*1としたとき，

$$\mathrm{Ad}\left(\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}\right) E_{ij} = d_i d_j^{-1} E_{ij}$$

であるから，

$$\mathfrak{gl}_n = \mathfrak{t}_n \oplus \left(\bigoplus_{1 \le i,j \le n, i \ne j} \mathbb{C}\, E_{ij} \right)$$

は同時固有空間分解である．$\mathbb{T}_n$ の 1 次元表現 $\varepsilon_i : \mathbb{T}_n \to \mathbb{C}^*$ を

$$\varepsilon_i : \mathbb{T}_n \ni \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \mapsto d_i \in \mathbb{C}^*$$

と定義すると，$i \ne j$ と

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j : \mathbb{T}_n \ni \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \mapsto d_i d_j^{-1} \in \mathbb{C}^*$$

に対して $\mathfrak{gl}_n(\varepsilon_i - \varepsilon_j) = \mathbb{C}\, E_{ij}$ であるから，ルート系は

$$R = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \le i, j \le n, i \ne j\}$$

であり，

$$\mathfrak{gl}_n = \mathfrak{t}_n \oplus \left(\bigoplus_{1 \le i,j \le n, i \ne j} \mathbb{C}\, E_{ij} \right)$$

がルート空間分解である．

3.2　ウエイト格子とディンキン図形

4　最高ウエイト理論

4.1　ウエイト

定義 4.1（ウエイト）　$G \subset \mathrm{GL}_n$ を連結古典代数群とする．極大トーラス $T := G \cap \mathbb{T}_n \subset \mathrm{GL}_n$ を固定する．G の有理表現 $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ に対して，その極大トーラスへの制限 $\rho|_T : T \to \mathrm{GL}(V)$ と考えると，これは T の有理表現である．$X := X(T)$ を T の指標の集合，$\lambda \in X = X(T)$ に対して

$$V(\lambda) := \{v \in V \mid \rho(t)v = \lambda(t)v \ (\forall t \in T)\}$$

と定義すると，

$$V = \bigoplus_{\lambda \in X(T)} V(\lambda)$$

*1 (i,j) 成分が 1 で他の成分がすべて 0 の行列．

と直和分解する．この直和分解を V の **ウエイト空間分解 (weight space decomposition)** という．$\lambda \in X = X(T)$ が G-表現 V の **ウエイト (weight)** であるとは，$V(\lambda) \neq \emptyset$ となることである．V のウエイト $\lambda \in X$ に対して，$V(\lambda)$ を V の **ウエイト空間 (weight space)** という．また，ウエイト空間の元 $v \in V(\lambda)$ を V の **ウエイトベクトル (weight vector)** という．$v \in V$ がウエイト λ のウエイトベクトルであるとき，$\mathrm{wt}(v) = \lambda$ と表すことにする．ウエイト λ のウエイト空間 $V(\lambda)$ に対して，その次元 $\dim V(\lambda)$ のことを **ウエイト重複度 (weight multiplicity)** という．有理 G-表現 V のウエイトの集合を

$$P(V) := \{\lambda \in X \mid \lambda \text{ は } V \text{ のウエイト }\}$$

と表すことにする．

さて，有理 G-表現 (ρ, V) に対して，その指標 $\chi_V : G \to \mathbb{C}^*$ を考える．このとき定義によって，$D \in T$ に対して

$$\chi_V(D) = \sum_{\lambda \in P(V)} \dim V(\lambda) \cdot \lambda(D)$$

となる．じつは，このデータのみから元の有理表現が復元できる．

定理 4.2　$G \subset \mathrm{GL}_n$ を連結古典代数群とし，$T = G \cap \mathbb{T}_n$ とする．(ρ, V) と (π, W) を 2 つの有理 G-表現とする．このとき，$(\rho, V) \simeq (\pi, W)$ となるための必要十分条件は，$\chi_V|_T = \chi_W|_T$ となることである．

証明　指標理論によって，G-表現の同型 $V \simeq W$ が存在するための必要十分条件は $\chi_V = \chi_W$ となることである．したがって，$\chi_V|_T = \chi_W|_T$ ならば $\chi_V = \chi_W$ を証明すれば十分である．証明中で次の補題を用いる．

補題 4.3（対角化可能性の十分条件）　$x \in G$ に対して，

$$D(x) := \det \begin{pmatrix} \mathrm{tr}(x^0) & \cdots & \mathrm{tr}(x^{n-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{tr}(x^{n-1}) & \cdots & \mathrm{tr}(x^{2n-2}) \end{pmatrix}$$

と定義する．もし $D(x) \neq 0$ であるならば，ある $g \in G$ が存在して $gxg^{-1} \in T$ となる．

$\chi_V|_T = \chi_W|_T$ と仮定する．$x \in G$ であって $D(x) \neq 0$ であるものをとる．補題によって，ある $g \in G$ が存在して $gxg^{-1} \in T$ となる．$\chi_V|_T = \chi_W|_T$ であり，かつ χ_V や χ_W は類関数なので

$$\chi_V(x) = \chi_V(gxg^{-1}) = \chi_W(gxg^{-1}) = \chi_W(x)$$

となる．代数多様体 G 上の関数 $D \cdot (\chi_V - \chi_W) \in \mathbb{C}[G]$ を考える．先ほどの計算によって，この関数は G 上で恒等的に 0 である．G は連結なので環 $\mathbb{C}[G]$ は整域であり，$D \neq 0$ なので $\chi_V - \chi_W = 0$ を得る．■

例 4.4　$V = \mathbb{C}^N$, $e_1, \ldots, e_n \in V$ を標準基底とする．$G \subset \mathrm{GL}_N = \mathrm{GL}(V)$ の自明な表現を考える．対角行列

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{pmatrix} \in G$$

に対し，$De_i = d_i e_i$ となる．

(1)　$G = \mathrm{GL}_N$ のとき，$P(V) = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$.

(2) $G=\mathrm{SL}_N$ のとき，$P(V)=\{\overline{\varepsilon_1},\ldots,\overline{\varepsilon_n}\}$.

(3) $G=\mathrm{SO}_{2n+1}$ のとき，

$$\mathrm{wt}(e_i)=\begin{cases}\varepsilon_i & (1\leq i\leq n)\\ 0 & (i=n+1)\\ -\varepsilon_{2n+2-i} & (n+2\leq i\leq 2n+1)\end{cases}$$

である．したがって，$P(V)=\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,0,-\varepsilon_n,\ldots,-\varepsilon_1\}$ となる．

(4) $G=\mathrm{Sp}_{2n}$ のとき，$P(V)=\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,-\varepsilon_n,\ldots,-\varepsilon_1\}$.

(5) $G=\mathrm{SO}_{2n}$ のとき，$P(V)=\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n,-\varepsilon_n,\ldots,-\varepsilon_1\}$.

4.2 最高ウエイト

以前と同様に，$\mathbb{B}_n\subset\mathrm{GL}_n$ を可逆上三角行列全体の集合，

$$\mathbb{U}_n:=\left\{\begin{pmatrix}1 & * & *\\ & \ddots & *\\ 0 & & 1\end{pmatrix}\right\}\subset\mathrm{GL}_n$$

を上三角行列であって対角成分がすべて 1 の行列のなす集合，

$$\mathbb{U}_n^-:=\left\{\begin{pmatrix}1 & & 0\\ * & \ddots & \\ * & * & 1\end{pmatrix}\right\}\subset\mathrm{GL}_n$$

を下三角行列であって対角成分がすべて 1 の行列のなす集合とする．$G\subset\mathrm{GL}_N$ を古典代数群とし，

$$B:=G\cap\mathbb{B}_n,\ U:=G\cap\mathbb{U}_n,\ U^-:=G\cap\mathbb{U}_n^-$$

などと置く．有理 G-表現 (ρ,V) に対し，

$$V^U:=\{v\in V\mid\rho(g)v=v\ (\forall g\in U)\}$$

と定義する．V のウエイト λ に対し，共通部分 $V^U\cap V(\lambda)$ の 0 でないベクトル $0\neq v\in V^U\cap V(\lambda)$ を**極大ベクトル (maximal vector)** という．$t\in T$ と $u\in U$ に対して，$u':=t^{-1}ut$ とおくとこれは再び U の元である．このとき，$v\in V^U$ に対して

$$\rho(u)\rho(t)v=\rho(t)\rho(u')v=\rho(t)v$$

であるから，$\rho(t)\in V^U$ である．したがって，V^U は T-不変である．よって，$V^U(\lambda)=V^U\cap V(\lambda)$ とおくと，

$$V^U=\bigoplus_{\lambda\in X(T)}V^U(\lambda)$$

と直和分解する．

ルート $\alpha\in R$ に対し，

$$X_\alpha:\mathbb{G}_{\mathrm{a}}\to G$$

を $X_\alpha(z) = \exp(zE_\alpha)$（$E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ はルートベクトル）で定義する．$D \in T$, $z \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\begin{aligned} DX_\alpha D^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} DE_\alpha^k D^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} (DE_\alpha D^{-1})^k \\ &= \exp(zDE_\alpha D^{-1}) \\ &= \exp(z\,\mathrm{Ad}(D)(E_\alpha)) \\ &= \exp(z\chi_\alpha(D)(E_\alpha)) \\ &= X_\alpha(\chi_\alpha(D)) \end{aligned}$$

となる．

補題 4.5　(ρ, V) を有理 G-表現，v をウエイト $\mathrm{wt}(v) = \lambda$ のウエイトベクトルとする．このとき，任意の $\alpha \in R$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\rho(X_\alpha(z))v = v_0 + \sum_{i=1}^{\infty} z^i v_i$$

（$v_0 = v$, $v_i \in V(\lambda + i\alpha)$, v_i は有限個を除いて 0）と書ける．

証明　$\mathbb{G}_\mathrm{a}$ の表現

$$\rho \circ X_\alpha : \mathbb{G}_\mathrm{a} \to \mathrm{GL}(V) \subset \mathbb{A}^{N^2}$$

を考える．$((\rho \circ X_\alpha)(z))_{ij} = z$ の多項式 である．よって，

$$((\rho \circ X_\alpha)(z))v = v_0 + zv_1 + \cdots + z^d v_d \quad (v_i \in V)$$

と書ける．したがって，$v_0 = v$ かつ $v_i \in V(\lambda + i\alpha)$ であることを示せばよい．$z = 0$ とすれば，$v_0 = v$ がわかる．一方，$D \in T$ に対し

$$\begin{aligned} \rho(D)\rho(X_\alpha(z))v &= \rho(DX_\alpha D^{-1})\rho(D)v \\ &= \rho(X_\alpha(\chi_\alpha(D)z))\chi_\lambda(D)v \\ &= \chi_\lambda(D)\,(\rho(X_\alpha(\chi_\alpha(D)z))v) \\ &= \chi_\lambda(D) \sum_{i=0}^{d} (\chi_\alpha(D)z)^i v_i \\ &= \sum_{i=0}^{d} \chi_{\lambda+i\alpha}(D) z^i v_i \end{aligned}$$

となるので，

$$\sum_{i=0}^{d} z^i \rho(D) v_i = \sum_{i=0}^{d} \chi_{\lambda+i\alpha}(D) z^i v_i$$

を得る．よって

$$\rho(D)v_i = \chi_{\lambda+i\alpha}(D)v_i \ (\forall D \in T)$$

であり，したがって $v_i \in V(\lambda + i\alpha)$ がわかる．■

補題 4.6 G を連結古典代数群，(ρ, V) を有理 G-表現，$v_0 \in V^U(\lambda)$ をウエイト $\lambda = \mathrm{wt}(v_0)$ の極大ベクトルとする．このとき，次の 2 つの V の部分空間は一致する．

(a) v_0 を含む最小の G-不変部分空間 $W = \mathbb{C}\langle \rho(g)v_0 \mid g \in G\rangle$.
(b) 集合 $\{\rho(g)v_0 \mid g \in U^-\}$ が生成する部分空間 $W' = \mathbb{C}\langle \rho(g)v_0 \mid g \in U^-\rangle$.

証明 $W' \subset W$ は明らか．v_0 は極大ベクトルなので，$u \in U$ に対して $\rho(u)v_0 = v_0$ となる．また，v_0 のウエイトは $\lambda = \mathrm{wt}(v_0)$ なので，$t \in T$ に対して $\rho(t)v_0 = \chi_\lambda(t)v_0$ となる．代数多様体の射

$$\phi : G \to W/W',\ g \mapsto \overline{\rho(g)v_0}$$

を考えると，$g \in U^-TU \subset G$ のとき，$\phi(g) = 0$ となる．また，

$$\delta : G \to \mathbb{C}, A \mapsto \prod_k \det(A_{[k],[k]})$$

を考える．Gauss 分解により，$\delta(g) \neq 0$ ならば $g \in U^-TU$ である．したがって，任意の $\psi \in (W/W')^*$ に対して，$(\psi \circ \phi) \cdot \delta = 0 \in \mathbb{C}[G]$ である．G は連結なので，$\mathbb{C}[G]$ は整域である．δ は 0 ではないので，$\psi \circ \phi = 0$ である．ψ は任意だったので，$\phi = 0$ すなわち $W/W' = 0$ である． ■

$G \subset \mathrm{GL}_N$ を古典代数群，$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする．

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}(\alpha) \right)$$

を $\mathfrak{g}$ のルート空間分解とする．また部分空間

$$\mathfrak{u}^+ := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \right\} \subset \mathfrak{g},\ \mathfrak{u}^- := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \vdots \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \right\} \subset \mathfrak{g}$$

を考え，R の部分空間 $R^\pm$ を

$$R^\pm := \{\alpha \in R \mid \mathfrak{g} \subset \mathfrak{u}^\pm\}$$

と定義すると $R = R^+ \amalg R^-$ であり，直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u},$$
$$\mathfrak{u}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in R^\pm} \mathfrak{g}(\alpha)$$

が存在する．R^+（または R^-）はある基底に関して正ルート（または負ルート）になる．

$\lambda, \mu \in X = X(T)$ に対して，

$$\lambda \geq \mu :\Leftrightarrow \lambda - \mu = \sum_{\alpha \in R^+} n_\alpha \alpha\ (\exists n_\alpha \geq 0)$$

と定めることで，X に前順序 $\geq$ を入れることができる（チェックは容易い）．

命題 4.7 (ρ, V) を G の有理表現，$v_0 \in V^U(\lambda)$ をウエイト $\mathrm{wt}(v_0) = \lambda$ の極大ベクトルとする．また，v_0 を含む最小の G 不変部分空間を $W = \mathbb{C}\langle \rho(g)v_0 \mid g \in G\rangle$ とする．このとき，$W(\lambda) = \mathbb{C}\, v_0$ であり，尚且つ直和

分解

$$W = W(\lambda) \oplus \left(\bigoplus_{\mu \in X, \mu < \lambda} W(\mu) \right)$$

が存在する．また，(ρ, W) は G の既約表現である．

証明　各場合ごとに計算することで，U^- は $\{X_{-\alpha}(z) = \exp(zE_{-\alpha}) \mid \alpha \in R^+, z \in \mathbb{C}\}$ で生成されることがわかる．よって補題 4.5 を繰り返し用いることで，

$$\rho(g) = v_0 + v' \ (v' \in \sum_{\mu < \lambda} V(\mu))$$

と表せる．特に

$$\rho(g)v_0 \in \mathbb{C}\, v_0 + \sum_{\mu < \lambda} W(\mu)$$

である．また，補題 4.6 より W は $\rho(g)v_0$ $(g \in U^-)$ たちで生成されるので，

$$W = \mathbb{C}\, v_0 \oplus \left(\bigoplus_{\mu < \lambda} W(\mu) \right)$$

を得る．

次に W が既約であることを示す．$W' \subset W$ を部分表現とし，W' のウエイト空間 $W'(\mu) = W' \cap W(\mu)$ を考える．（このとき，明らかに

$$W' = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} W'(\mu)$$

であり，これは W' のウエイト分解である．）もし，$W' \cap W(\lambda) \neq \emptyset$ であるならば $v_0 \in W'$ であるので $W' = W$ である．また，$W' \cap W(\lambda) = 0$ とすると $W' \subsetneq W$ なので，完全可約性より直和分解

$$W = W' \oplus W''$$

が存在する．しかしこのとき $W(\lambda) = W'(\lambda) \oplus W''(\lambda) = W''(\lambda)$ なので，先と同様の議論によって $W = W''$，すなわち $W' = 0$ である．したがって，G-表現 W は既約である．■

(ρ, V) を G の既約有理表現，$P(V) \subset X(T)$ を V のウエイトの集合とする．$P(V)$ は有限集合なので，前順序 $\geq$ に対して極大元を持つ．以下では，これが実は最大元であること（すなわち極大元が一意的であること）をみる．$\lambda \in P(V)$ を極大元のひとつとする．$0 \neq v_0 \in V(\lambda)$ に対し補題 4.5 から，$\alpha \in R^+$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\rho(X_\alpha(z))v_0 = v_0 + \sum_{i=1}^{\infty} z^i v_i \ (v_i \in V(\lambda + i\alpha))$$

と表せる．しかし，$\lambda < \lambda + i\alpha$ であるから，λ の極大性から $v_i = 0$ $(i > 0)$ であり，よって $\alpha \in R^+$ と $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$\rho(X_\alpha(z))v_0 = v_0$$

である．計算によって $X_\alpha(z)$ $(\alpha \in R^+, z \in \mathbb{C})$ が U を生成することがわかるので，v_0 は極大ベクトル，すなわち $v_0 \in V^U(\lambda)$ であることがわかる．

W を $\rho(g)v_0$ $(g \in G)$ で生成される部分空間とすると，V の既約性と命題 4.7 より

$$V = W = \mathbb{C}\,v_0 \oplus \left(\bigoplus_{\mu<\lambda} V(\mu) \right)$$

を得る．したがって，λ は $P(V)$ の最大元である！

定義 4.8（最高ウエイト）　この λ を V の **最高ウエイト (highest weight)** といい，$0 \neq v_0 \in V(\lambda)$ を **最高ウエイトベクトル (highest weight vector)** という．

最高ウエイトは既約表現 (ρ, V) から決まり，最高ウエイトベクトルはスカラー倍を除いて一意的である．すでに見たように，最高ウエイトベクトルは自動的に極大ベクトルになる．

例 4.9　(1)　$G \to \mathbb{C}^*$ を自明な表現とする．この最高ウエイトは 0 である．

(2)　$G \subset \mathrm{GL}_N$ を自然表現とする．このとき，ε_1 が最高ウエイトであり，e_1 が最高ウエイトベクトルである．これはたとえば $G = \mathrm{GL}_N$ または SL_N のときには，$P(V) = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N\}$ であり，尚且つ $R^+ = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq N\}$ であることから従う．

(3)　$k \in \mathbb{Z}$ に対して，GL_N の表現

$$\det{}^k : \mathrm{GL}_N \to \mathbb{C}^* = \mathrm{GL}(\mathbb{C}),\ A \mapsto (\det A)^k$$

を考える．対角行列

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_N \end{pmatrix}$$

に対して，$\det{}^k(D) = (d_1 \cdots d_N)^k$ なので

$$P(\mathbb{C}) = \{k(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_N)\}$$

である．ウエイトが 1 つしかないので，これが最高ウエイトである．

最高ウエイトで既約表現を分類することができる．

定理 4.10　(ρ, V) と (π, W) を 2 つの既約有理 G-表現であって，同じ最高ウエイト λ を持つと仮定する．このとき，表現としての同型 $V \simeq W$ が存在する．

証明　各表現の最高ウエイトベクトル $v_0 \in V$ と $w_0 \in W$ をとる．$X := V \oplus W$, $x_0 := (v_0, w_0) \in X$ と定義する．さらに，$X' \subset X$ を x_0 で生成される G-不変部分空間とする．このとき，$x_0 \in X^U$ であり，かつ x_0 は X のウエイトベクトルで $\mathrm{wt}(x_0) = \lambda$ である．したがって，x_0 はウエイト λ の極大ベクトルであり，よって命題 4.7 より X' は既約表現である．X' から V, W それぞれへの自然な射は G-同変な全射であり，したがって X' の既約性から $V \simeq X' \simeq W$ となる．　■

以上から，最高ウエイトを取る写像によって単射

$$\{G \text{ の既約有理表現の同型類}\} \hookrightarrow X(T)$$

が定まる．しかし，これは一般に全射ではない．次の節の目的は，この写像の像を特定することである．

(ρ, V) を最高ウエイト λ を持つ G の既約有理表現とする．このような既約表現は同型を除いて一意的に決まるので，

$$(\rho_\lambda, L_\lambda) := (\rho, V)$$

と表すことにする．等式

$$V = \mathbb{C}\, v_0 \oplus \left(\bigoplus_{\mu < \lambda} V(\mu) \right)$$

および命題 4.7 により，

$$\dim L_\lambda^U(\mu) = \delta_{\lambda,\mu}$$

を得る．実際，$L_\lambda^U(\mu) \neq 0$ とすると，命題 4.7 より極大ベクトル $w_0 \in L_\lambda^U(\mu)$ が生成する G-不変部分空間 W のウエイト空間分解は

$$W = \mathbb{C}\, w_0 \oplus \left(\bigoplus_{\mu' < \mu} W(\mu') \right)$$

と書ける．しかし，V の既約性より $V = W$ であるので $\mu = \lambda$ が従う．

より一般に，局所有理 G-表現 (ρ, V) に対して

$$V = \bigoplus_{i \in I} V_i$$

を既約分解とすると，各 i に対してあるウエイト λ_i が存在して $V_i \simeq L_{\lambda_i}$ となり，したがって

$$V^U = \bigoplus_{i \in I} V_i^U \simeq \bigoplus_{i \in I} L_{\lambda_i}^U(\lambda_i)$$

となる．任意の $\lambda \in \widehat{G}$ に対して，$V^U(\lambda) = \bigoplus_{i \in I} V_i^U(\lambda)$ であるので，

$$\begin{aligned} \dim V^U(\lambda) &= \sharp\{ i \in I \mid V_i \simeq L_\lambda \} \\ &=: [V : L_\lambda] \end{aligned}$$

となる．

4.3 支配ウエイト

G を連結古典代数群，$T = \mathbb{T}_n \cap G$ を極大トーラスとする．

4.3.1 ワイル群の作用

$W = N_G(T)/T$ をワイル群とする．W は T に $w \cdot t := n_w t n_w^{-1}$ $(n_w \in N_G(T), \overline{n_w} = w \in W)$ によって作用していた．よって，W の $X = X(T)$ への作用を

$$(w \cdot \chi)(t) := \chi(w^{-1} \cdot t) \ (w \in W, \chi \in X, t \in T)$$

によって定義できる．

次の命題は計算すればわかる．

命題 4.11 作用 $W \curvearrowright X$ は各場合に次のようになっている．

(1) $G=\mathrm{GL}_n$ のとき，$w\in W=\mathfrak{S}_n$ と $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in X=\mathbb{Z}^n$ に対して

$$w\cdot(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=(\lambda_{w^{-1}(1)},\dots,\lambda_{w^{-1}(n)})$$

となる．

(2) $G=\mathrm{SL}_n$ のとき，$w\in W=\mathfrak{S}_n$ と $\overline{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}\in X=\mathbb{Z}^n/(1,\dots,1)\mathbb{Z}$ に対して

$$w\cdot\overline{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}=\overline{(\lambda_{w^{-1}(1)},\dots,\lambda_{w^{-1}(n)})}$$

となる．

(3) $G=\mathrm{SO}_{2n+1},\mathrm{Sp}_{2n},\mathrm{SO}_{2n}$ のとき，$(w,t)\in W\subset\mathfrak{S}_n\ltimes(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, $t=(t_1,\dots,t_n)$ と $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in X=\mathbb{Z}^n$ に対して

$$\begin{aligned}w\cdot(\lambda_1,\dots,\lambda_n)&=(\lambda_{w^{-1}(1)},\dots,\lambda_{w^{-1}(n)})\\ t\cdot(\lambda_1,\dots,\lambda_n)&=(t_1\lambda_1,\dots,t_n\lambda_n)\end{aligned}$$

となる．

(ρ,V) を G の有理表現とし，$\mu\in X$ を V のウエイト，$v\in V$ をウエイト μ のウエイトベクトルとする．$w\in W$ をワイル群の任意の元とし，そのリフト $n_w\in N_G(T)$ を選んでおく．このとき，

$$\begin{aligned}\rho(t)(\rho(n_w)v)&=\rho(n_w)\rho(n_w^{-1}tn_w)v\\&=\rho(n_w)\rho(w^{-1}\cdot t)v\\&=\mu(w^{-1}\cdot t)\rho(n_w)v\ (\because\ w^{-1}\cdot t\in T,\mathrm{wt}(v)=\mu)\\&=(w\cdot\mu)(t)(\rho(n_w)v)\end{aligned}$$

となるので，線形同型

$$\rho(n_w):V(\mu)\xrightarrow{\sim}V(w\cdot\mu)$$

が存在することがわかる．したがって，次のことがわかった．

命題 4.12 (ρ,V) を G の有理表現とし，$P(V)\subset X$ を V のウエイトのなす集合とする．このとき，$P(V)$ はワイル群 W の作用で閉じており，かつ $\mu\in P(V)$ と $w\in W$ に対して

$$\dim V(\mu)=\dim V(w\cdot\mu)$$

が成り立つ．

応用として，次のことがわかる．

命題 4.13 (1) 任意の $G=\mathrm{GL}_n$ の 1 次元有理表現は，ある $k\in\mathbb{Z}$ について $\det^k$ と同型である．

(2) $G=\mathrm{SL}_n,\mathrm{SO}_n,\mathrm{Sp}_{2n}$ のとき，1 次元表現は自明なものしかない．

証明 (1) を示す．1 次元表現 $(\rho,\mathbb{C})$ のウエイトの集合は 1 つの要素のみからなるので，$P(V)=\{\lambda\}$ とする．このとき，$P(V)$ が W-不変であることから，λ は W の作用による固定元である．したがって命題 4.11 より，ある $k\in\mathbb{Z}$ に対して

$$\lambda=(k,k,\dots,k)\in\mathbb{Z}^n$$

である．λ は最高ウエイトでもあるので，定理 4.10 と例 4.9 (3) より，$(\rho,\mathbb{C})\simeq(\det^k,\mathbb{C})$ を得る．

(2) を示す．(1) 同様に，1 次元表現 $(\rho,\mathbb{C})$ のウエイトの集合を $P(V)=\{\lambda\}$ とすると λ は W の作用の固定元であるが，$G=\mathrm{SL}_n,\mathrm{SO}_n,\mathrm{Sp}_{2n}$ の場合は命題 4.11 より $\lambda=0$ でなければならない． ■

4.3.2　支配ウエイト

(ρ, V) を G の既約有理表現とすると，最高ウエイト $\lambda \in X$ が存在する．ワイル群の元 $w \in W$ に対して $w \cdot \lambda$ も V のウエイトであるが，λ の最大性から $w \cdot \lambda \leq \lambda$ が成り立つ．

この節では，次の問題を考える：$\lambda \in X(T)$ に対して，λ を最高ウエイトに持つ既約有理表現 (ρ, V) が存在するための必要十分条件は何か．

まず，次のようなルート系の部分集合 $\Pi \subset R$ を考える．

(1) $G = \mathrm{GL}_n$ のとき，$\Pi := \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$.
(2) $G = \mathrm{SL}_n$ のとき，$\Pi := \{\overline{\varepsilon_i} - \overline{\varepsilon_{i+1}} \mid 1 \leq i \leq n-1\}$.
(3) $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$ のとき，$\Pi := \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\varepsilon_n\}$.
(4) $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ のとき，$\Pi := \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{2\varepsilon_n\}$.
(5) $G = \mathrm{SO}_{2n}$ のとき，$\Pi := \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n\}$.

これらの Π はルート系 R の基底または単純ルートの集合という．Π の要素を **単純ルート (simple root)** と呼ぶ．正ルート $\alpha \in R^+$ は，ある $m_\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\gamma \in \Pi)$ に対して

$$\alpha = \sum_{\gamma \in \Pi} m_\gamma \gamma$$

と表せることで特徴付けられる．よって，$\lambda, \mu \in X$ に対して $\lambda \geq \mu$ であるための必要十分条件は，

$$\lambda - \mu = \sum_{\gamma \in \Pi} n_\gamma \gamma,\ (n_\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と書けることである．この事実を用いて具体的に計算することで，次のことが確かめられる．

命題 4.14　$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ とする．

(1) $G = \mathrm{GL}_n$ $(\lambda \in X)$ のとき，任意の $w \in W = \mathfrak{S}_n$ に対して $w \cdot \lambda \leq \lambda$ となるための必要十分条件は，$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ となることである．
(2) $G = \mathrm{SL}_n$ $(\overline{\lambda} \in X)$ のとき，任意の $w \in W = \mathfrak{S}_n$ に対して $w \cdot \overline{\lambda} \leq \overline{\lambda}$ となるための必要十分条件は，$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ となることである．
(3) $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$ または Sp_{2n} $(\lambda \in X)$ のとき，任意の $w \in W = \mathcal{H}_n$ に対して $w \cdot \lambda \leq \lambda$ となるための必要十分条件は，$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ となることである．
(4) $G = \mathrm{SO}_{2n}$ $(\lambda \in X)$ のとき，任意の $w \in W = \mathcal{H}_n^\circ$ に対して $w \cdot \lambda \leq \lambda$ となるための必要十分条件は，$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq |\lambda_n|$ となることである．

定義 4.15（支配ウエイト）　命題 4.14 の条件を満たす $X = X(T)$ の要素を **支配ウエイト (dominant weight)** と呼ぶ．支配ウエイトからなる X の部分集合を X^+ で表す．

例 4.16　(1)　$G = \mathrm{GL}_n$ のとき，$w_k := \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ とおくと

$$X^+ = \left\{ \sum_{i=1}^n m_i w_i \mid m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ (1 \leq i \leq n-1), m_n \in \mathbb{Z} \right\}$$

と書ける．

(2) $G = \mathrm{SL}_n$ のとき，$w_k := \overline{\varepsilon_1} + \cdots + \overline{\varepsilon_k}$ とおくと

$$X^+ = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} m_i w_i \mid m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \ (1 \leq i \leq n-1) \right\}$$

と書ける．

(3) $G = \mathrm{SO}_{2n+1}$ または Sp_{2n} のとき，$w_k := \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ とおくと

$$X^+ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} m_i w_i \mid m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \ (1 \leq i \leq n) \right\}$$

と書ける．

(4) $G = \mathrm{SO}_{2n}$ のとき，$w_k := \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k, (1 \leq k \leq n-1)$, $w_n^{\pm} = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{n-1} \pm \varepsilon_n$ とおくと

$$X^+ = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} m_i w_i + m_n w_n^+ \mid m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \ (1 \leq i \leq n) \right\} \cup \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} m_i w_i + m_n w_n^- \mid m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \ \ (1 \leq i \leq n) \right\}$$

と書ける．

また，簡単に次のことが分かる．

命題 4.17 自然な写像 $X^+ \to X/W, \ \gamma \mapsto W \cdot \gamma$ は全単射である．

4.3.3 既約有理表現の分類

この節の目標は，次の定理を証明することである．

定理 4.18 支配ウエイト $\lambda \in X^+$ に対して，λ を最高ウエイトにもつ既約有理 G-表現 (ρ, V) が存在する．

さらに定理 4.10 によって，このような既約表現は同型を除いて一意的である．

証明のための準備として，いくつか補題を証明しておく．

補題 4.19 $G \subset \mathrm{GL}_N$ を連結古典代数群，$V_\square = \mathbb{C}^N$ を自然な G-表現，$e_1, \ldots, e_N \in V_\square$ を標準基底とする．このとき，$1 \leq k \leq N$ に対して

$$v_k := e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \in \bigwedge^k (V_\square)$$

は外積表現 $\bigwedge^k (V_\square)$ の極大ベクトルであり，そのウエイトは $\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_k$ である．

証明 ボレル部分群の元

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & d_N \end{pmatrix} \in B = G \cap \mathbb{B}_N$$

に対して，

$$\begin{aligned} A \cdot (e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) &= Ae_1 \wedge \cdots \wedge Ae_k \\ &= d_1 \cdots d_k (e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) \end{aligned}$$

である．よって，$A \in T = G \cap \mathbb{T}_N$ の場合を考えれば分かるように，$v_k := e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ はウエイトベクトルである．もし $A \in U = G \cap \mathbb{U}_N$ なら $A \cdot (e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ なので，$v_k := e_1 \wedge \cdots \wedge e_k$ は極大ベクトルでもある． ■

補題 4.20 (ρ, V), (σ, W) を有理 G-表現とし，$v \in V$ と $w \in W$ を極大ベクトルであって，ウエイトがそれぞれ $\mathrm{wt}(v) = \lambda, \mathrm{wt}(w) = \mu$ であるものとする．このとき，$v \otimes w$ はテンソル積表現 $V \otimes W$ の極大ベクトルで，ウエイトが $\mathrm{wt}(v \otimes w) = \lambda + \mu$ である．

証明 明らか． ■

証明（定理 4.18 の証明） $G = \mathrm{GL}_n$ の場合に証明する．$\lambda \in X^+$ を支配ウエイトとし，例 4.16 のように

$$\lambda = m_1 w_1 + \cdots + m_{n-1} w_{n-1} + m_n w_n,\ (m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\ \ (1 \leq i \leq n-1), m_n \in \mathbb{Z})$$

と表しておく．m_n の正負で場合分けする．$m_n \geq 0$ のときは，補題 4.19 と補題 4.20 によって

$$v := v_1^{\otimes m_1} \otimes \cdots \otimes v_n^{\otimes m_n} \in V_{\square}^{\otimes m_1} \otimes \left(\bigwedge^2 V_{\square} \right)^{\otimes m_2} \otimes \cdots \otimes \left(\bigwedge^n V_{\square} \right)^{\otimes m_n}$$

はウエイトが λ の極大ベクトルである．W を v が生成する G-不変部分空間とすると，命題 4.7 によって W は既約表現であり，その最高ウエイトは λ である．

次に $m_n < 0$ の場合を考える．このとき，

$$1 \in \mathbb{C}_{\det^{-1}} \simeq \left(\bigwedge^n V_{\square} \right)^*$$

がウエイト $-w_n$ の極大ベクトルであることを用いて，同様の議論ができる．

$G = \mathrm{SL}_n, \mathrm{SO}_n, \mathrm{Sp}_{2n}$ の場合にもほぼ同様に証明ができる．$G = \mathrm{SO}_{2n}$ の場合だけ少し難しい． ■

以上をまとめると，次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
\{G\text{ の既約有理表現}\} \arrow[r, hook, "\text{最高ウエイト}"'] \arrow[dr, "\text{全単射}"'] & X(T) \arrow[d, two heads] \\
& X^+ \arrow[r, equal] & X/W
\end{tikzcd}$$