6 月総会
代数幾何学ガイダンス

早稲田大学基幹理工学部数学科 3 年　@waheyhey

2014 年 6 月 15 日

目次

代数幾何学を専攻していない人に代数幾何学というと，なんだかよく分からないが難しい分野だと言われることが多い．実際 1960 年代に Grothendieck らによって行われたスキーム理論による代数幾何学の基礎の大幅な書き換えによって，代数幾何学の基礎を修得するにはそれなりの時間と根性が必要になった．またスキーム論やそこから派生した圏論の問題が目くらましになって，座標幾何の一般化として研究されていた伝統的な代数幾何学の姿が初学者の目に映りにくくなっている．何を隠そう筆者もその目くらましにあった一人で，初学の頃と比べてだいぶ代数幾何学への印象が変わったと思う[*1]．H26 年度の都内数学科学生集合 6 月総会の発表のレジュメに手直しを加えたものである本稿は，代数幾何学を学んだことがない人に向けて出来るだけ多くの古典代数幾何学の topic を易しく解説しようという目的で書かれた．欲張りすぎかもしれないが，初学者が代数幾何を勉強する際のブックガイドも兼ねるようにした．本稿を読んだ方がいずれ代数幾何学を学ばれる際，抽象的かつ一般的に展開され（ているように一見するとみえ）る理論を実感あるものとして理解するための一助となれば幸いです．

[*1] 始めはなんだかとても抽象的な学問だと思い込んでいた．

1　環と代数多様体

1.1　環とイデアル

代数幾何の前に，そもそも代数学とは何だろうか．代数学とは掛け算，足し算などが定められた「代数系」を扱うものである．代数学では（もちろん様々なものがあるが），以下で定められる「環」と呼ばれるものが主役となっていることが多い．

定義 1（（可換）環）　集合 R が（単位的可換）**環** (ring) であるとは，R の中に 2 項演算和 $+$，および積 $\cdot$ が存在して次の性質を満たすときいう．($a \cdot b$ を単に ab で表す．)

(i)　任意の $a, b, c \in R$ に対し，$(a+b)+c = a+(b+c)$ が成り立つ．

(ii)　ある $0 \in R$ が存在して任意の $a \in R$ に対し $a+0 = 0+a = 0$ となる．このような 0 は存在すれば一意的であり (check!)，これを R の零元という．

(iii)　任意の $a \in R$ に対し $b \in R$ が存在して，$a+b=0$ となる．a に対するこの $b \in R$ は存在すれば一意である (check!) ので，これをを $-a$ で表す．

(iv)　任意の $a, b \in R$ に対し，$a+b = b+a$ が成り立つ．

(v)　任意の $a, b, c \in R$ に対し，$(ab)c = a(bc)$ が成り立つ．

(vi)　ある $1 \in R$ が存在して，任意の $a \in R$ に対し，$a1 = 1a = a$ となる．このような 1 は存在すれば一意的であり (check!)，この 1 を R の単位元という．

(vii)　任意の $a, b \in R$ に対し，$ab = ba$ となる．

(viii)　任意の $a, b, c \in R$ に対して $a(b+c) = ab+ac$，$(a+b)c = ac+bc$ が成り立つ．　□

演習 2　環の定義より，任意の $a \in R$ に対し $0a = a0 = 0$ を導け．また，条件 (vi) または (vii) のみが成り立たないような代数系の例を作れ．　□

定義 3（環準同型）　R, R' を環としたとき，環の間の写像 $f : R \to R'$ が**環準同型** (ring homomorphism) であるとは，

(a)　任意の $a, b \in R$ に対し，$f(a+b) = f(a)+f(b)$ が成り立つ．

(b)　任意の $a, b \in R$ に対し，$f(ab) = f(a)f(b)$ が成り立つ．

(c)　$f(1_R) = 1_{R'}$ となる．ここで $1_R, 1_{R'}$ はそれぞれ R, R' の単位元である．

が成り立つときいう．環準同型 $f : R \to R'$ が全単射であるとき，
textbf 環同型であるという．環 R, R' の間に環同型が存在するとき，R と R' は**同型**であるといい，$R \simeq R'$ で表す．環 R から R' への環準同型の全体からなる集合を $\mathrm{Hom}(R, R')$ で表す．　□

演習 4　$0_R, 0_{R'}$ をそれぞれ R, R' の零元としたとき，環準同型 $f : R \to R'$ に対し，$f(0_R) = 0_{R'}$ となる．また，任意の $a \in R$ に対し，$f(-a) = -f(a)$ が成り立つ．　□

演習 5　定義 3 の条件 (a),(b) からは条件 (c) の式は得られないことを確かめよ．　□

例 6　(i)　整数論を中心に最も基本的な環の例は有理整数環 $\mathbb{Z}$ である．実際，これは通常の和と積で環になることが確かめられる．さらにこの環は，任意の（単位的可換）環に対し環準同型が一意に存在する

(check!) という著しい性質を持つ．

(ii) 代数幾何学で重要になるのは複素数体 $\mathbb{C}$ である．これも通常の和と積で環になることが直ちに分かるが，さらにこの環は 0 以外の元で「割り算」が出来るという性質がある．より正確には，任意の 0 でない元 $0 \neq a \in \mathbb{C}$ に対し，ある $a^{-1} \in \mathbb{C}$ が存在して，$aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ が成り立つ．このような性質をもつ環を，**体** (field) であるという．以下で述べていくように，代数幾何学は多変数の多項式の共通零点を考えるのが出発点になる．その際，複素数体の「複素係数の代数方程式は複素数の範囲で必ず解をもつ（**代数学の基本定理**）」という性質が重要になってくるのである．

(iii) 有理数の全体 $\mathbb{Q}$ や実数の全体 $\mathbb{R}$ も体の例である．既にみた有理整数環 $\mathbb{Z}$ は体ではない．

(iv) 代数幾何学において体の次に重要なのは，n **変数多項式環** $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ である．これも単位的可換環であるが，体ではない．係数環は $\mathbb{C}$ である必要はないが，今回は係数環を取り替えたときに起こる様々な問題を避けるため，係数環は複素数体で固定する．環があったときに，その上の多項式環を考えるというのは「新しい環を作る」重要な操作のうちの一つである．全く新しい環を作っているという点ではほぼ唯一と言って過言でないと思う．

(v) 上の演習の答えの一つになるが，n 次正方行列全体 $M(n, \mathbb{C})$ は積が可換でない環の例を与えている．もちろん体でもない．

(vi) 偶数全体 $2\mathbb{Z}$ を考えよう．これも和と積を自然に持ちしかも積は可換になるが，しかし単位元は持たない． $\square$

環論を考える上ではさらに次の「イデアル」という概念が重要となる．これが如何に重要な概念であるかは，次節で代数多様体について説明するとき明らかになる．

定義 7（イデアル） 環 R の部分集合 $\mathfrak{a} \subset R$ が**イデアル** (ideal) であるとは，次の条件を満たすことである．

(i) 任意の $a, b \in \mathfrak{a}$ に対し，$a - b \in \mathfrak{a}$ が成り立つ．

(ii) 任意の $a \in \mathfrak{a}$ と $r \in R$ に対し，$ra \in \mathfrak{a}$ が成り立つ． $\square$

演習 8 イデアル $\mathfrak{a} \subset R$ は加法に関して Abel 群になる，すなわち，

(i) $0 \in \mathfrak{a}$

(ii) $a \in \mathfrak{a}$ に対し $-a \in \mathfrak{a}$

となることを示せ． $\square$

定義 9（生成されるイデアル） 部分集合 $S \subset R$ に対し，S を含むような最小のイデアルを，**S で生成されるイデアル**という．このようなイデアルは，S を含むようなイデアル全体の共通部分からなるイデアルを考えれば，一意的に存在していることは明らかである．S が有限集合 $\{f_1, \ldots, f_r\}$ であるときは，S で生成されるイデアルを $(f_1, \ldots, f_r)$ で表す．このように有限集合から生成されるイデアルは **有限生成** (finitely generated) であるという．特に一つの元から生成されるイデアルを**単項イデアル** (principal ideal) という．

例 10 (a) 有理整数環 $\mathbb{Z}$ に対し，(n) はイデアルになる．逆に，簡単な計算により $\mathbb{Z}$ のイデアルはこの形のものに限られることを確かめることができる．このように任意のイデアルが単項イデアルである環を単項イデアル環という．

(b) 複素数体 $\mathbb{C}$ のイデアルは，(0) および $\mathbb{C}$ の 2 つのみである．

(c) 一般に環 R に対して (0) と R 自身はイデアルになる．これを指して自明なイデアルという．体は自明

なイデアルしか持たない．逆に，自明なイデアル以外持たない環は体であることも分かる．

(d) 環準同型 $f : R \to R'$ に対して，その核 (kernel),

$$\operatorname{Ker} f := \{a \in R \mid f(a) = 0\}$$

はイデアルである． □

演習 11　上で列挙した事実のうち，非自明と思われるものの証明を考えよ． □

イデアルの中で重要なものは次の２つである．

定義 12（**素イデアル**）　$\mathfrak{p} \subset R$ を，R でないイデアルとする．$\mathfrak{p}$ は，$ab \in \mathfrak{p}$ ならば $a \in \mathfrak{p}$ または $b \in \mathfrak{p}$ が成り立つとき，**素イデアル** (prime ideal) という． □

定義 13（**極大イデアル**）　イデアル $\mathfrak{m} \subset R$ は，R 自身でないイデアルの中で包含関係について極大であるとき，**極大イデアル** (maximal ideal) であるという． □

注意 14　R 自身は素イデアルに含めない．また，Zorn の補題を用いれば任意の環に対し極大イデアルは常に存在することが分かる．Zorn の補題についての解説は集合位相の教科書に，実際に極大イデアルが存在することの証明は基本的な代数学の教科書に譲ることにする． □

例 15　(a) 素数 $p \in \mathbb{Z}$ に関して，$(p) \subset \mathbb{Z}$ は素イデアルになる．また，これは同時に極大イデアルにもなる．

(b) $ab = 0 \in R$ ならば $a = 0$ または $b = 0$ が成り立つとき，環 R は整域 (integral domain) であるという．定義から，環 R が整域であることと (0) が素イデアルであることは同値である．

(c) 既約多項式 $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ から生成される単項イデアル (f) は素イデアルである．

(d) 一般に環が与えられたとき，その素イデアルや極大イデアルを決定することは難しい問題である． □

イデアルが与えられたとき，その剰余環というものを以下のように考えることができる．二項関係および同値関係とそれによる商集合については集合位相の教科書を参照されたい．

定義 16（**剰余環**）　R を環，$\mathfrak{a} \subset R$ をイデアルとする．$a, b \in R$ が同値 $a \sim b$ であることを，$a - b \in \mathfrak{a}$ であることとして定める．この二項関係 $\sim$ は R 上の同値関係になる．この同値関係による商集合を $R/\mathfrak{a}$ で表す．$a \in R$ が $R/\mathfrak{a}$ において属する同値類を $[a]$ で表す．$R/\mathfrak{a}$ の中に和と積を $[a] + [b] := [a + b]$，$[a][b] := [ab]$ で自然に定めることができる．これは各類の代表元の取り方によらない．剰余環にはもとの環から標準的な全射環準同型 $R \twoheadrightarrow R/\mathfrak{a}$ が存在する．この準同型の核はもちろん $\mathfrak{a}$ である． □

例 17　n を正の整数とする．有理整数環 $\mathbb{Z}$ のイデアル $n\mathbb{Z}$ による剰余環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を考える．このとき，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の各代表元を $0, \ldots, n-1$ で取ることができ，このように $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の元を表しておけば，標準的な全射は各整数に対し n で割ったときの剰余をとる写像と考えることができる．これがイデアルによる商を考えたものが剰余環と呼ばれる所以である． □

演習 18　環 R のイデアル $\mathfrak{p}$ が素イデアルであるための必要十分条件は，剰余環 $R/\mathfrak{p}$ が整域であることである．また，イデアル $\mathfrak{m} \subset R$ が極大イデアルであるための必要十分条件は，剰余環 $R/\mathfrak{m}$ が体であることである．特に，極大イデアルは素イデアルである． □

証明はしないが，次の定理たちは重要である．難しくないので本を読めばすぐに証明付きで理解できるだろう．

定理 19 **（準同型定理）**　環準同型 $f : R \to R'$ に対し, $\mathrm{Im}\, f := \{a' \in R' \mid$ ある $a \in R$ が存在して $a' = f(a)$ となる $\}$ と定めると，これは自然に環になる．このとき，f は環同型

$$R/\mathrm{Ker}\, f \simeq \mathrm{Im}\, f$$

を誘導する．■

定理 20　剰余環 $R/\mathfrak{a}$ のイデアルは，環 R のイデアルで $\mathfrak{a}$ を含むものと 1 対 1 に対応する．「イデアル」の部分を「素イデアル」や「極大イデアル」に変えても同じことが成り立つ．■

最後に，代数幾何学で重要になる被約イデアル (reduced ideal) について補足しておく．

定義 21 **（根基イデアル）**　環 R のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して，$\mathfrak{a}$ の**根基イデアル** (radical ideal) $\sqrt{\mathfrak{a}}$ を

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{f \in R \mid \text{ある } n \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ が存在して } f^n \in \mathfrak{a} \text{ となる.}\}$$

で定める．□

演習 22　根基イデアル $\sqrt{\mathfrak{a}}$ は実際に R のイデアルになることを示せ．また，$\mathfrak{a} \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$ が成り立つことを確認せよ．□

定義 23 **（被約イデアル）**　環 R のイデアル $\mathfrak{a}$ は，$\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ となるとき**被約イデアル** (reduced ideal) であるという．□

演習 24　素イデアル（および極大イデアル）は被約イデアルである．これを確かめよ．□

演習 25　1 変数多項式環 $\mathbb{C}[X]$ のイデアル $(X^2 - 1)$ は被約イデアルであることを確かめよ．また，(X^2) は被約イデアルではないことを確かめよ．2 変数多項式環 $\mathbb{C}[X, Y]$ の場合には，被約イデアル，被約でないイデアルにはそれぞれどのようなものがあるか．□

以上で環論の本当に基本的な部分の説明を終わりにする．紙数の関係で省略した話題も多いので，より詳しい説明は代数学の初歩的な教科書を参照されたい．

1.2　アフィン代数多様体

では，改めて問おう．代数幾何とはなんであろうか．かなりおおざっぱな言い方をすれば，代数幾何学とは “代数多様体” とよばれる図形の研究である．では “代数多様体” とは何か．代数多様体とは局所的に多項式系の共通零点となるような図形のことである．たとえば，小学校の頃から慣れ親しんできた n 次関数のグラフは「(x の多項式) $- y = 0$ を満たす点の集まり」であり，まさしく代数多様体である．では，その代数多様体を研究するとは何か．これは幾何学全般に対し言えることだとは思うが，最終的な目標は扱っている図形，代数幾何の場合は “代数多様体” の分類理論の構築であろう．では，代数多様体の分類とはなんであろうか. . . .

などと，出発点から一歩も踏み出さずにだらだらと問答を続けても仕方ないので，以下で代数幾何学で扱う図形である “代数多様体” の基礎理論について解説しよう．その過程で出来るだけ代数幾何学的な考え方，そ

の動機づけについて説明し，“代数幾何学” というものをしっかりと感じてもらえるように心がけた．より幾何学的な側面については次章以降で扱う．

はじめに，この節でアフィン代数多様体を定義する．これは可微分多様体においてはユークリッド空間の開部分集合にあたるものであり，代数幾何学は主にこのアフィン代数多様体を貼り合わせてつくられる代数多様体について展開される．この節の原稿は会誌 “数学のなかま 第 54 号” に掲載の著者の原稿 “Bézout の定理” [26] の第 1 節に加筆と修正を加えたものである．本稿において位相空間については一切解説してこなかったが，この概念に不慣れな場合もあまり気にしないで読み進めて欲しい．また，この節に書いた注意の多くは，ある程度現代数学を学んでいることを前提として書かれており，初学の場合は読み飛ばしてよい．

定義 26（アフィン代数的集合）　アフィン空間 $\mathbb{A}^n = \mathbb{C}^n$ において，有限個の多項式 $f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ の共通零点の集合を $V(f_1, \ldots, f_r)$ で表し，アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ のザリスキ閉集合，または**アフィン代数的集合** (affine algebraic set) という．　□

体上の多項式環については次が成り立つ．

定理 27（ヒルベルトの基底定理）　複素数係数の多項式環 $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ はネーター環である．すなわち，任意のイデアルが有限生成になる．　□

この定理によれば，多項式環 $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ のイデアル $\mathfrak{a}$ について有限個の生成元 $f_1, \ldots, f_r$ が存在して $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$ となる．このとき，$V(\mathfrak{a}) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n \mid \forall g \in \mathfrak{a}, g(x) = 0\}$ と定義すれば，明らかに $V(\mathfrak{a}) = V(f_1, \ldots, f_r)$ がなりたつ．したがって，$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ のイデアル $\mathfrak{a}$ について $V(\mathfrak{a})$ を考えるのと，$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ の有限個の元 $f_1, \ldots, f_r$ について $V(f_1, \ldots, f_r)$ を考えるのは同じことである．以下，$V(\mathfrak{a})$ の形のものもアフィン代数的集合ということにする．

注意 28　環 A は次の同値な条件をみたすとき，**ネーター環** (Noetherian ring) という．

(i)　A のイデアルの空でない任意の集合は，極大元を持つ．
(ii)　A のイデアルの任意の昇鎖は停留的である．
(iii)　A の任意のイデアルは有限生成．
(iv)　任意の有限生成 A 加群が有限表示 A 加群．　□

命題 29　アフィン代数的集合については，次が成り立つ．

(i)　$\mathbb{A}^n$ と $\emptyset$ はアフィン代数的集合である．
(ii)　$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ のイデアルとすると，$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$
(iii)　$\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ を $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ のイデアルの族とすると，$\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$

証明　(i)　$V(1) = \emptyset, V(0) = \mathbb{A}^n$.
(ii)　$\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ より，$V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset V(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$ は成り立つ．ここで，$x \in V(\mathfrak{a}\mathfrak{b}), x \notin V(\mathfrak{a})$ なる元をとると，ある $f \in \mathfrak{a}$ に対して $f(x) \neq 0$．このとき，任意の $g \in \mathfrak{b}$ に対し $fg \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ だから $f(x)g(x) = (fg)(x) = 0$ より $g(x) = 0$，すなわち $x \in V(\mathfrak{b})$.
(iii)　$\bigcap_{i \in I} V(\mathfrak{a}_i) = V\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$ であり，$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ は $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ で生成されることより従う．　■

これにより，アフィン代数的集合は位相空間の閉集合の公理を満たすことが分かった．以下，アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ にはアフィン代数的集合を閉集合とするような位相（**ザリスキ位相** (Zariski topology) という）が入って

いるものとし，アフィン代数的集合というときも，$\mathbb{A}^n$ の部分空間として，この位相を考えることにする．

定義 30（**イデアル**）　アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の部分集合 U に対して，

$$I(U) = \{f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \mid \forall x \in U, f(x) = 0\}$$

と定義し，U の**イデアル**という． □

命題 31　アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の部分集合 U に対して，

$$V(I(U)) = \overline{U}$$

が成り立つ． □

証明　$U \subset V(I(U))$ は定義より明らかだから，$V(I(U))$ は U を含む閉集合である．一方，$V(\mathfrak{a})$ を U を含む任意の閉集合とすると，任意の $f \in \mathfrak{a}$ に対して，$x \in U \Rightarrow f(x) = 0$ が成り立つから，$\mathfrak{a} \subset I(U)$．よって $V(I(U)) \subset V(\mathfrak{a})$ であるから，$V(I(U)) = \overline{U}$ となる． ■

次の定理は代数幾何学において重要な定理であるが，証明には可換環論の準備を多く要するので，ここでは成り立つと認めてしまうものとする．証明については代数幾何学の教科書か，可換環論の教科書を参照されたい．

定理 32（**ヒルベルトの零点定理**）　$\mathfrak{a}$ を $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ のイデアルとするとき，

$$I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

が成り立つ． □

系 33　アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の閉集合（すなわちアフィン代数的集合）と，多項式環 $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ の被約イデアルは 1 対 1 に対応している．
また，アフィン空間の各点からなる 1 点集合（これはアフィン空間の既約閉集合である）は多項式環の極大イデアルと 1 対 1 に対応している． □

証明　前半はよい．後半については，$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ の極大イデアルが $\mathfrak{m}_x = (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)$ の形に限ることを言えばよい．この $\mathfrak{m}_x$ が極大イデアルになるのは，

$$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \mathbb{C}, \quad X_i \mapsto x_i$$

の核を考えればよい．逆にある極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在したとして，$V(\mathfrak{m})$ は空でないから，ある $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して $x \in V(\mathfrak{m})$ であり，よって $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_x$ で $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ となる． ■

特に系の後半を指して **Hilbert の弱零点定理**（Hilbert's weak Nullstellensatz）という．この「点と極大イデアルの対応」が代数幾何学の基礎事項の中で最も重要である．代数幾何学では図形（代数多様体）に関する幾何学的な主張を可換環論の言葉に翻訳して証明していくが，その過程ではこの定理を用いて「点と極大イデアルの対応」を捉えることが基本になる．それは，代数多様体を一般化したスキームの理論を考える上でも変わらない．Hilbert の零点定理をその重要性まで含めてしっかりと理解するのが，代数幾何学の勉強の出発点なのである．

注意 34　Hilbert の弱零点定理により 1 点が閉集合になるから，アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ および，その部分空間は T_1 である．しかし，一般には T_2 空間にはならない．
また，アフィン代数的集合すなわちザリスキ閉集合は，$\mathbb{C}^n$ の通常の位相においても閉集合である．なぜならば，多項式 $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}$ への連続写像と見れば，$V(f)$ は一点 $\{0\} \subset \mathbb{C}$ の f による引き戻しになっているからである．すなわち，$\mathbb{C}^n$ のザリスキ位相は，$\mathbb{C}^n$ の通常の位相より真に弱い．複素代数幾何では $\mathbb{C}$ の通常の位相と Zariski 位相を使い分けながら議論を進めることがあるが，このようなときには混乱を避けるため Zariski 位相の意味での閉集合を **Zariski 閉集合**と呼ぶ．□

定義 35 **（既約空間）**　空でない位相空間 X は，X と一致しない 2 つの X の閉集合 V_1, V_2 を用いて $X = V_1 \cup V_2$ と表せないとき**既約** (irreducible) であるという．X の部分集合 M は，M が X の部分空間として既約であるときに，既約であるという．□

命題 36　アフィン代数的集合 $V \subset \mathbb{A}^n$ が既約であるための必要十分条件は，$I(V)$ が $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ の素イデアルになることである．□

証明　アフィン代数的集合 V が既約であるとする．$f, g \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ に対して，既約性より $V \subset V(f) \cup V(g) = V(fg)$ ならば $V \subset V(f)$ または $V \subset V(g)$ であるから，$fg \in I(V)$ ならば $f \in I(V)$ または $g \in I(V)$ が成り立つ．よって $I(V)$ は素イデアルである．
逆に，$I(V)$ が素イデアルであるとする．$I(V)$ が素イデアルであることより，任意の $f, g \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ に対して，$V \subset V(f) \cup V(g) = V(fg)$ ならば $V \subset V(f)$ または $V \subset V(g)$ が成り立つ．ここで，$V \subset V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ とすると，$V(\mathfrak{a}), V(\mathfrak{b})$ は，$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ のそれぞれの生成元 $(f_1, \ldots, f_r), (g_1, \ldots, g_l)$ を考えることで $V(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{r} V(f_i), V(\mathfrak{b}) = \bigcap_{j=1}^{l} V(g_j)$ と表せるから，$V \subset \bigcap_{i,j} (V(f_i) \cup V(g_j))$ と書ける．よって，各組 (i, j) に対して，$V \subset V(f_i)$ または $V \subset V(g_j)$ の少なくとも一方が成り立つ．このとき，全ての i に対し $V \subset V(f_i)$ となるか，全ての j に対し $V \subset V(g_j)$ となるかの少なくとも一方が成り立つ（背理法からすぐわかる）から，$V \subset V(\mathfrak{a})$ または $V \subset V(\mathfrak{b})$ となり V は既約である．■

以上より，アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の既約閉集合と，多項式環 $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ の素イデアルが対応することが分かった．つまり，アフィン代数的集合と多項式環のイデアルには以下の関係がある．

アフィン代数的集合	多項式環のイデアル
アフィン代数的集合	被約イデアル
既約閉集合（部分多様体）	素イデアル
点	極大イデアル

このように，代数幾何学では “幾何的” なものと “代数的” なものが随所で対応するのである．

注意 37　既約な空間の性質について列挙する．次は同値である．

(i)　X は既約である．
(ii)　X の空でない任意の 2 つの開集合の交わりは空でない．
(iii)　X の空でない開集合は稠密である．
(iv)　X の全体と一致しない閉集合は希薄である．すなわち空でない開集合を含まない．
(v)　X の空でない任意の開集合が連結である．

(vi) X の空でない任意の開集合は既約である．

冗長になるので証明は詳しく述べないことにするが，難しくない． □

定義 38（既約成分） 位相空間 X の既約閉集合全体は，それ自身空でないとき Zorn の補題により極大元を持ち，これを X の**既約成分** (irreducible component) という．（アフィン代数的集合においては，その座標環の極小素イデアルに対応する閉集合といっても同じことである．） □

次にいよいよアフィン代数多様体を定義する．

定義 39（アフィン代数多様体） 既約なアフィン代数的集合 V を，**アフィン代数多様体** (affine variety) という． □

例 40 ここまで殆ど例を見ずにきてしまったので，ここでいくらかの確認をしよう．

(i) $f = X - Y$ としたとき，$V(X-Y)$ は $\mathbb{A}^2$ の中のグラフ $Y = X$ である．アフィン代数多様体の最も基本的な例は小学校で学んでいたのである．

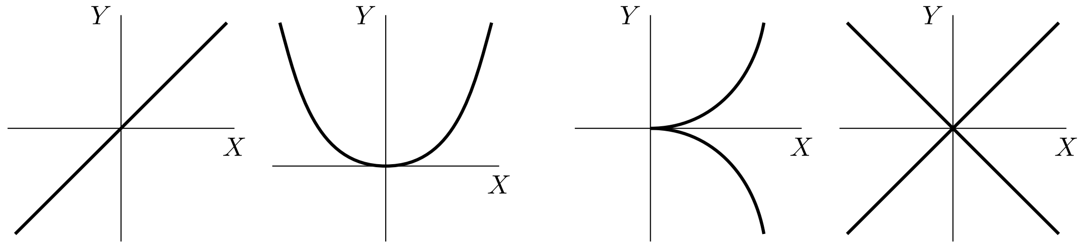
(ii) 2 次関数のグラフ $V(X^2 - Y)$ もアフィン代数多様体である．

(iii) $V(X^3 - Y^2)$ を図示してみよ．これは原点付近が尖っていて上の 2 つとは毛色が異なって見えるが，アフィン代数多様体である．

(iv) たとえば $V = V((X-Y)(X+Y))$ は，$V = V(X-Y) \cup V(X+Y)$ とかけるので既約でないから，アフィン代数多様体ではない．

(v) $V(X-1, Y+2)$ は $(1, -2)$ に対応する点であり，アフィン代数多様体である．

(i) (ii) (iii) (iv)



$X = Y$ $Y = X^2$ $Y^2 = X^3$ $(X-Y)(X+Y) = 0$

ここではギリギリ目に見える範囲ということで $\mathbb{A}^2$ 内のアフィン代数多様体を見た． □

次に，代数多様体の次元について定義する．

命題 41 任意のアフィン代数的集合の減少列

$$V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n \supset \ldots$$

は停留的である． □

証明 各 V_n に対応するイデアルを考えれば，定理 27 より成り立つ． ■

注意 42 閉集合についての極小条件を満たす位相空間をネーター空間という．すでにみたようにザリスキ位相を考えたときアフィン空間はネーターである．ネーター空間の部分空間はまたネーターになる．逆に，ネー

ター的な部分空間の有限個の和もネーターになる．証明は難しくない．

また一般に，ネーター空間 X は擬コンパクトである．なぜならば $\{U_i\}_{i\in I}$ を X の開被覆とし，$\mathcal{U}$ を U_i たちの有限個の和で表される X の開集合の集合とすれば，条件より $\mathcal{U}$ は極大元 V をもつ．$V = X$ である．なぜなら $V \subsetneq X$ とすると $x \in X \setminus V$ と $x \in U_i$ があって $V \subsetneq V \cup U_i \in \mathcal{U}$ となり極大性に矛盾する．よって X は擬コンパクトになる．

特に，アフィン空間は擬コンパクトになる．逆に，任意の開集合が擬コンパクトな空間はネーター的になる．証明は難しくない． □

命題 43　任意のアフィン代数的集合 V は，有限個の既約閉集合（すなわちアフィン代数多様体）V_i の和集合 $V = \bigcup_{i=1}^{d} V_i$ の形に表せる． □

証明　$\mathcal{U} := \{$ 空でない V の閉集合で既約閉集合の有限和で書けないもの $\}$ とする．$\mathcal{U}$ が空でないと仮定すれば $\mathcal{U}$ は極小元を持つから，それを V_0 とする．V_0 は既約でないから，V_0 に真に含まれる閉集合 V_1 と V_2 があって $V_0 = V_1 \cup V_2$ と書ける．しかし，V_0 の $\mathcal{U}$ での極小性より V_1 と V_2 は各々に含まれる既約閉集合の有限和でかけるから，V_0 も有限個の既約閉集合の和で書けることになり，これは矛盾である． ■

注意 44　ネーター空間 V は高々有限個の既約成分を持つ．なぜなら，$V = \bigcup_{i\in I} V_i$（各 V_i は既約）と表示したとき，既約閉集合 Z について $Z \subset \bigcup V_i$ とすれば，$Z = \bigcup (Z \cap V_i)$ となり，Z の既約性よりある i について $Z \subset V_i$ となる．特に Z として既約成分をとればよい． □

定義 45 **（次元）**　V をアフィン代数多様体とするとき，V のザリスキ閉集合は，それ自身がアフィン代数多様体であるときに V の閉部分多様体であるという．ザリスキ閉部分多様体の真の減少列

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_n \neq \emptyset$$

の長さ n の上限を V の**次元**といい，$\mathrm{dim} V$ で表す．代数的集合の次元については，既約成分たちの次元の上限と定める． □

注意 46　n 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ がここで定義された意味で n 次元であることを証明するには，ネーターの正規化定理などの可換環論の深い結果を用いなければならない．以降，本稿では次元は直感に従って議論することにして，厳密さは求めないことにする． □

幾何学を展開する上では，対象となる "図形" である多様体のみでなく，それらを "比較" するための写像を考えることが不可欠である．では，代数幾何を展開する上で採用すべき写像はどのようなものであろうか．アフィン代数多様体は多項式たちの共通零点で定義されていた．とすれば，それらの間の写像としては次の "多項式写像" を採用するのが自然であろう．

定義 47 **（多項式写像）**　n 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ から 1 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^1$ への写像で，ある多項式 $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ について，

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n &\longrightarrow \mathbb{A}^1 \simeq \mathbb{C} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto f(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

と書けるものを，$\mathbb{A}^n$ 上の**多項式関数**という．

また，m 個の多項式関数 $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ に関し，

$$F := (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{A}^n \longrightarrow \mathbb{A}^m, \qquad x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$$

で定まる写像を $\mathbb{A}^n$ から $\mathbb{A}^m$ への**多項式写像**という．

$V \subset \mathbb{A}^n$ をアフィン多様体とするとき，$\mathbb{A}^n$ から $\mathbb{A}^m$ への多項式関数 F の V 上への制限

$$F : V \longrightarrow \mathbb{A}^m$$

を，V から $\mathbb{A}^m$ への多項式写像という．

さらにアフィン多様体 $W \subset \mathbb{A}^m$ に関して，$F(V) \subset W$ となるとき，F は V から W への多項式写像という．2 つのアフィン代数多様体 V, W の間に全単射な多項式写像 $f : V \xrightarrow{\sim} W$ が存在するとき，アフィン代数多様体 V, W は**同型** (isomorphic) であるという．

V から W への多項式関数全体がなす集合を $\mathrm{Hom}(V, W)$ で表す． □

とくに，多項式関数全体は重要な意味を持つ．V 上の多項式関数全体は V を復元するのである（注意 53）．

定義 48（アフィン座標環）　アフィン代数的集合 V に対して，

$$\Gamma(V) := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$$

と定める．これはアフィン代数多様体 V については，$I(V)$ が素イデアルであることから整域になる．アフィン代数多様体 V について，この $\Gamma(V)$ を V の**アフィン座標環** (affine coordinate ring) という． □

例 49　(i)　n 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ のアフィン座標環は，n 変数多項式環 $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ である．

(ii)　アフィン代数多様体 $V = V(X - Y) \subset \mathbb{A}^2$ はアフィン直線 $\mathbb{A}^1$ と多項式写像 $V ni(X, X) \to X \in \mathbb{A}^1$ によって同型である．このとき V のアフィン座標環は

$$\begin{aligned} \Gamma(V) = \mathbb{C}[X, Y]/(X - Y) &\longrightarrow \Gamma(\mathbb{A}^1) = \mathbb{C}[Z] \\ X &\longmapsto Z \\ Y &\longmapsto Z \end{aligned}$$

により同型となる． □

注意 50　環 R に対し，その中の素イデアルの昇鎖，

$$R \supsetneq \mathfrak{p}_n \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \mathfrak{p}_0$$

の長さの最大値 n を環の次元といい，$\dim R$ で表す．一般の環では素イデアルの昇鎖は無限に続くことがあるので，その場合は環の次元は無限ということにする．環が体上有限型の場合は，体上有限型な環の定義から常に有限次元になる．また，体の次元は 0 である．

今までにみたアフィン代数多様体（既約閉集合）と素イデアルの対応，およびアフィン代数多様体の次元の定義より，アフィン代数多様体 V とその座標環 $\Gamma(V)$ について，

$$\dim V = \dim \Gamma(V)$$

が成り立つ． □

補題 51　アフィン代数多様体 $V \subset \mathbb{A}^n$ 上の多項式関数全体 $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{A}^1)$ は自然な環構造をもつ．さらに，環同型

$$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{A}^1) \simeq \Gamma(V)$$

が成り立つ． □

証明　$f, g \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ が，V 上の多項式関数として等しいことの定義は，任意の $x \in V$ に対し $f(x) = g(x)$ となることである．すなわち, 任意の $x \in V$ に対し $(f-g)(x) := f(x)-g(x) = 0$ となる．すなわち, 多項式 $f-g \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ は V のイデアルに含まれる．よって，$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{A}^1) \simeq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/I(V) = \Gamma(V)$ である． ■

注意 52　後にわかるように Γ はアフィン代数多様体の圏から環の圏への反変圏同値であるが，上の補題はその関手が $\mathbb{A}^1$ で表現されているということを意味する．これは一般の k スキームの圏から環の圏への大域切断をとる関手に対しても正しい．さらに一般のスキームに対しては $\mathbb{Z}$ 上相対次元 1 のアフィン空間 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ に取り替えて議論すれば正しい．この関係はスキーム論において，スキームや層を環や加群，層などから構成するときに，根本にあるアイディアとして重要になる． □

注意 53　ヒルベルトの弱零点定理および定理 20 より，点集合として，

$$V = \mathrm{Spm}\,(\Gamma(V))$$

が成り立つ．ここで，環 A に対して $\mathrm{Spm}(A)$ で A の極大イデアル全体からなる集合を表す．また，$\mathfrak{a}$ を $\Gamma(V)$ のイデアルとして，$\mathrm{V}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}\,(\Gamma(V)) \mid \mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}\}$ を閉集合とするような位相を $\mathrm{Spm}\,(\Gamma(V))$ に入れると（すなわち，アフィンスキーム $\mathrm{Spec}\,(\Gamma(V))$ の部分空間としての位相)，同相

$$V \cong \mathrm{Spm}\,(\Gamma(V))$$

が成り立つ．これまでアフィン代数多様体 V を考える上では常に ambient となるアフィン空間 $\mathbb{A}^n \supset V$ を考える必要があったが，この事実はこのような ambient によらない，V の内在的な再定義を与えている． □

次の命題も，代数幾何における「代数的」なものと「幾何学的」なものの基本的な対応として重要である．

命題 54　V, W をアフィン代数多様体としたときに，多項式写像 $F : V \to W$ と環準同型 $\varphi : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ は 1 対 1 に対応する． □

証明　環準同型 $\varphi : \Gamma(W) \to \Gamma(V)$ をとる．自然な全射，$\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \to \Gamma(W)$ に対し φ を合成することで，

$$\psi : \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \Gamma(V)$$

を得る．ここで，$Y_i := \psi(X_i) \in \Gamma(V) = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{A}^1)$ とおくと，これは多項式写像

$$F := (Y_1, \ldots, Y_n) : V \longrightarrow \mathbb{A}^n$$

を定める．多項式 $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ について，

$$f(Y_1, \ldots, Y_n) = \psi(f(Y_1, \ldots, Y_n))$$

であるが，もし $f \in I(W)$ であるなら $\psi(f) = 0$ より，任意の $x \in V$ に対して $f(F(x)) = 0$ であること，すなわち $F(x) \in W$ であることが分かるので，F は多項式写像 $F : V \to W$ を定めている．

逆に多項式写像 $F : V \to W$ に関しては，

$$\begin{aligned} \varphi = F^* : \Gamma(W) &\longrightarrow \Gamma(V) \\ f &\longmapsto f \circ F \end{aligned}$$

によって環準同型が定まる．これが互いに逆写像になっている． ■

注意 55　ここから，$\mathbb{C}$ 上有限型整域同士の射によって，極大イデアルが極大イデアルに引き戻されることもわかる．これは，例えば有理整数環 $\mathbb{Z}$ を有理数体 $\mathbb{Q}$ に埋め込む写像 $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ を考えれば分かるように，一般の環では成り立たないことである． $\square$

注意 56　多項式環から $\mathbb{C}$ の作用を保つような全射環準同型がある整域を，**有限型 $\mathbb{C}$ 代数** ($\mathbb{C}$-algebra of finite type) という．アフィン代数多様体 V のアフィン空間への埋め込み $V \subset \mathbb{A}^n$ は全射環準同型

$$\Gamma(\mathbb{A}^n) = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow \Gamma(V) = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$$

を導くから，アフィン代数多様体のアフィン座標環は有限型 $\mathbb{C}$ 代数の例である．上の命題は有限型 C 代数の圏とアフィン代数多様体と多項式写像の圏が圏同値になっていることを主張している． $\square$

注意 57　ここで分かったことは，アフィン代数多様体は整域，すなわち既約かつ被約な環と対応しているということである．しかし，しばしば被約とは限らない環を考えると都合が良いときがある（この一例は §3 で解説する）．しかし，ここまで紹介した枠組みではこのような環を幾何学的に捉えることができない．そこで現れるのが代数的スキームの考え方である．代数的スキームの考え方をさらに一般の環上にまで押し進めるとスキームが現れる．これは古典的な代数幾何から考えれば過度な一般化であるが，これによって整数論に現れるような環についても古典代数幾何と類似の方法による幾何学的な考察を用いた研究が可能になる．これが数論幾何の考え方の源泉である． $\square$

最後に，アフィン代数多様体の開部分集合について少しだけ説明しておく．

注意 58（アフィン開集合と環の局所化）　アフィン代数的集合 $X \subset \mathrm{A}^n$ と X 上の関数 $f \in \Gamma(X)$ に対して，開集合 $X_f := \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ もアフィン代数的集合になる．このことを示そう．$\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1$ の同一視のもとで

$$\widetilde{X_f} := \{(x, y) \in \mathbb{A}^{n+1} \mid x \in X, f(x)y = 1\}$$

と定める．このとき写像 $X_f \ni x \to (x, f(x)^{-1}) \in \widetilde{X_f}$ は全単射である．$\tilde{X}_f \subset \mathbb{A}^{n+1}$ は，X のイデアル $I(X)$ の生成元 $f_1, \ldots, f_r$ と $\tilde{f}_{|X} = f$ なる多項式 $\tilde{f} \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ を用いて

$$\widetilde{X_f} = \{(x, y) \in \mathbb{A}^{n+1} \mid f_1(x) = f_r(x) = \tilde{f}(x)y - 1 = 0\}$$

と表されるから，$\mathbb{A}^{n+1}$ のアフィン代数的集合である．

X が既約ならば X_f も既約で，すなわちアフィン代数多様体である．

さて，アフィン代数多様体[*2] $\widetilde{X_f} \subset \mathbb{A}^{n+1}$ の座標環 $\Gamma(\widetilde{X_f})$ について，ここまでの議論から同型

$$\Gamma(\tilde{X}_f) \simeq \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}]/(f_1, \ldots, f_r, \tilde{f}X_{n+1} - 1)$$

が成り立つ．一方，分数多項式の環

$$\Gamma(X)_f = \left\{ \frac{g}{f^k} \mid g \in \Gamma(X), k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

[*2] 簡単のため，単にアフィン代数的集合ではないとしよう！

を考え，全射環準同型

$$\begin{aligned}\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n,X_{n+1}] &\longrightarrow \Gamma(X)_f \\ X_i &\longmapsto \frac{X_i}{1} \qquad (\text{if } i=1,\dots,n) \\ X_{n+1} &\longmapsto \frac{1}{f}\end{aligned}$$

を考えるとこの核は $(f_1,\dots,f_r,\tilde{f}X_{n+1}-1)$ であることが確かめられるので，環の準同型定理から結局同型

$$\Gamma(X_f) := \Gamma(\widetilde{X_f}) \simeq \Gamma(X)_f$$

を得る．ここで用いた分数多項式の環 $\Gamma(X)_f$ を，$\Gamma(X)$ を $f\in\Gamma(X)$ で **局所化** (localize) して得られる環という．すなわち，代数多様体の開部分集合（つまり開部分多様体）を考える操作は，対応する座標環側でみると環の局所化という概念に対応している． □

例 59 n 次複素正方行列全体 $\mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ を各成分を座標とみて自然に $\mathbb{A}^{n^2}$ と同一視する．行列式 det は各成分の多項式であるから，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) := \{A\in\mathrm{M}(n,\mathbb{C}) \mid \det(A)\neq 0\} \subset \mathrm{M}(n,\mathbb{C})$ は注意 58 よりアフィン代数多様体になる．言うまでもないが，$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ は**一般線形群**として知られる幾何学的にも重要な線型代数の対象でもある．正則行列の掛け算写像

$$\begin{aligned}\mu : \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\times\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \\ (A,B) &\longmapsto AB\end{aligned}$$

は各成分の多項式写像になっているから，代数多様体の射である．また，逆行列をとる写像

$$\begin{aligned}\iota : \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \\ A &\longmapsto A^{-1}\end{aligned}$$

も各成分ごとの分数多項式で得られているが，実はこれも代数多様体の射を与えていることが注意 58 と同じ方法で確かめられる．一般線形群 $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ は積 μ により群となるが，このように群がそれ自身アフィン代数多様体で，積の写像 μ および逆元をとる写像 ι が代数多様体の射になっているものを**線型代数群** (linear algebraic group) または単に**代数群** (algebraic group) という．線型代数群は表現論や組合せ論とも関係して，これについての深い幾何学を展開することができる．他には **特殊線型群** (special linear group)，**直交群** (orthogonal group)，**特殊直交群** (special orthogonal group)，**シンプレクティック群** (symplectic group) なども代数群の例で，これらを総称して**古典群** (classical group) と呼んでいる． □

1.3 射影代数多様体

はじめに述べた通り，代数幾何の研究対象である代数多様体はアフィン代数多様体の貼り合わせとして定義される．その最も基本的な例が射影空間である．n 次元の射影空間は $n+1$ 個のアフィン空間の貼り合わせとして得られる．代数幾何学の多くは射影的空間の Zariski 閉部分空間として定義される射影代数多様体について展開される．射影空間の幾何学はアフィン空間の幾何学では成り立たない綺麗な結果を多く含むことが古くから知られていて [23][25][26]，歴史の中で次第にアフィン空間を押しのけ，グラフ（代数多様体）を描くキャンバスとしての地位を得ていった．

定義 60（射影空間）　$n+1$ 次元アフィン空間（ここでは点集合としてのみ考える）から原点を除いた集合 $\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}$ に次で同値関係を定義する．

$$(a_0,\ldots,a_n)\sim({a_0}',\ldots,{a_n}')\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{C}^{\times},(a_0,\ldots,a_n)=(\lambda{a_0}',\ldots,\lambda{a_n}').$$

このとき，

$$\mathbb{P}^n:=\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}/\sim$$

と定義し，この $\mathbb{P}^n$ を n **次元射影空間** (n dimensional projective space) という．$\mathbb{P}^n$ において $(a_o,\ldots,a_n)\in\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}$ が属する類を $[a_0:\cdots:a_n]$ と表す．この射影空間における特別な座標の表示を射影空間の**斉次座標** (homogeneous coodinate) という．　□

特に，$\mathbb{P}^1$ を**射影直線** (projective line)，$\mathbb{P}^2$ を**射影平面** (projective surface) という．直線や平面というよび方は複素次元がそれぞれ 1, 2 であることに由来しており，実次元で測ると次元はそれぞれ 2, 4 であることに注意する．特に，$\mathbb{P}^1$ は 2 次元球面 S^2 に同相であり，このことから複素解析幾何学では**リーマン球面** (Riemann sphere) とも呼ばれている．

定義 61（射影代数的集合）　m 次の同次多項式 $f\in\mathbb{C}[X_0,\ldots,X_n]$ に対して，

$$V_+(f):=\{[a_0:\cdots:a_n]\in\mathbb{P}^n\mid f(a_0,\ldots,a_n)=0\}$$

で定義し，$\mathbb{P}^n$ の**射影代数的集合** (projective algebraic set) という．　□

注意 62　一般に，非同次な多項式 $F\in\mathbb{C}[X_0,\ldots,X_n]$ と $a=[a_0:\cdots:a_n]\in\mathbb{P}^n$ に対して $F(a)=0$ は well-defined でない．実際，非同次多項式の方程式 $X^2-Y=0$ を考えたとき，$[X:Y]=[1:1]$ は一見これを満たすが，同じ点である $[2:2]$ などはこれを満たしていない．同じ点であるのに (多項式) $=0$ の方程式を満たしたり満たさなかったりするのでは，意味がよく分からない．これが well-defined でないということである．　□

定義 63（同次イデアル）　多項式環 $\mathbb{C}[X_0,\ldots,X_n]$ において，有限個の同次多項式で生成されるイデアルを**同次イデアル** (homogeneous ideal) という．　□

アフィンのときと同じように，同次多項式 $F_1,\ldots,F_r$ で生成するイデアルを $\mathfrak{a}$ とすると，$V_+(F_1,\ldots,F_r)=V_+(\mathfrak{a})$ が成り立つ．以下，$V_+(\mathfrak{a})$ の形のものも射影代数的集合と言うことにする．

定義 64（射影空間のザリスキ位相）　アフィン空間のときと同様にして，射影代数的集合は閉集合の公理を満たし，射影空間内に位相を定める．この位相を射影空間の**ザリスキ位相**という．また，射影空間 $\mathbb{P}^n$ のザリスキ位相において，開集合は $D_+(\mathfrak{a})=\mathbb{P}^n\setminus V_+(\mathfrak{a})$ の形である．特に $D_+(f)$ の形のものを，射影空間の基本開集合という．　□

定義 65（射影代数多様体）　既約な射影代数的集合を，**射影代数多様体** (projective variety) という．　□

射影空間 $\mathbb{P}^n$ において，基本開集合 $U_i = D_+(X_i)$ は次の全単射により，$\mathbb{A}^n$ と同一視できる．

$$\begin{aligned} U_i = D_+(X_i) &\longrightarrow \mathbb{A}^n \\ [x_0 : \cdots : x_i : \cdots : x_n] &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \ldots, \frac{x_n}{x_i} \right) \end{aligned}$$

この対応が well-defind および全単射であることは明らかである．ここでは詳しい説明を省くが，後述する多項式の同次化，非同次化という操作を考えることにより，この写像が $D_+(X_i)$ と $\mathbb{A}^n$ の同相写像を与えていることも分かる．

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n D_+(X_i)$$

であるから，射影空間 $\mathbb{P}^n$ は，$n+1$ 個のアフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の貼り合わせとして得られる．この貼り合わせの写像は次で与えられる．簡単のため，U_0 と U_1 での貼り合わせを考えるが，他の基本開集合の組み合わせについても全く同様である．

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}^n & \longrightarrow & U_0 \cap U_1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^n \\ & & & & \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & [1 : x_1 : \cdots : x_n] & \longmapsto & \left(\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1} \right) \end{array}$$

ここで，自然に多項式写像でないような写像が得られてしまうことに気をつけたい．この写像はアフィン空間の開集合 $D(X_1) \subset \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ 上でのみ定義されており，後にみる有理射と呼ばれるものの一番最初に出会う例になっている．

射影代数的集合は，アフィン代数的集合の張り合わせとして表される．ここでは簡単のため，$V_+(xz - y^2) \subset \mathbb{P}^2 = \{[x : y : z]\}$ を例にとって説明しよう．同次多項式 $xz - y^2$ に $x = 1$ を代入すると多項式 $z - y^2$ を得る．これは丁度アフィン開集合 $U_x := D_+(x) \subset \mathbb{P}^2$ と $\mathbb{A}^2 = \{(y, z)\}$ を同一視したときの写像と一致している．このように，同次多項式のある変数に 1 を代入することを同次多項式の非同次化という．これによって次の同型を得る．

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^2 & \supset & U_x \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{A}^2 \\ & & V_+(xz - y^2) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\simeq"] & V(z - y^2) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

逆に，多項式 $f = z - y^2$ に，$y = y'/x'$ と $z = z'/x'$ を代入して $x^{\deg f} = x^2$ 倍すれば，もとの同次多項式 $xz - y^2$ が復元する．これを多項式の同次化という．このように Zariski 閉集合が対応するので，U_x と $\mathbb{A}^2$ は Zariski 位相で同相であることがわかる．y, z についても同様の操作をすれば，射影代数多様体 $V_+(xz - y^2)$ はアフィン代数多様体 $V(z - y^2), V(xz - 1), V(x - y^2)$ の貼り合わせで得られていることが分かる．

ここまででみたように射影代数多様体は局所的にはアフィン代数多様体になるが，射影空間内で大域的な情報をみるには次のアフィン錐というものを考えるとよい．

定義 66（アフィン錐） 射影代数的集合 $V = V_+(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n$ に対して，

$$CV = V(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}^{n+1}$$

と定義し，CV を V に対応する**アフィン錐** (affine cone) と言う． □

補題 67　V を射影代数多様体として，V の同次イデアルを，

$$I(V) = \langle \{f \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n] \mid f \text{ は同次で，} \forall x \in V, f(x) = 0\} \rangle$$

と定義すれば，V が既約であるための必要十分条件は $I(V)$ が素イデアルになることである．□

証明　命題 36 とほとんど同じである．■

補題 68　V を射影代数的集合とする．対応するアフィン錐 CV が既約である必要十分条件は，V が既約であることである．□

証明　命題 36 と補題 67 より従う．■

命題 69　任意の射影代数的集合の減少列

$$V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n \supset \ldots$$

は停留的である．□

証明　各々のアフィン錐をとれば，補題 68 と命題 41 より成り立つ．■

命題 70　任意の射影代数的集合 V は，有限個の既約閉集合（すなわち射影代数多様体）V_i の和集合 $V = \bigcup_{i=1}^{d} V_i$ の形に表せる．□

証明　これは命題 69 より $\mathbb{P}^n$ がネーター空間であることより従う．■

定義 71（射影代数的集合の次元）　V を射影代数多様体とするとき，V のザリスキ閉集合は，それ自身が射影代数多様体であるときに V の閉部分多様体であるという．V のザリスキ閉部分多様体の真の減少列

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_n \neq \emptyset$$

の長さ n の上限を V の**次元**といい，$\mathrm{dim} V$ で表す．代数的集合の次元については，既約成分たちの次元の上限と定める．□

命題 72　射影代数多様体 V と，そのアフィン錐 CV について次が成り立つ．

$$\dim CV = \dim V + 1$$

□

証明　直感的には，$\dim V = n$ とし，$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_n \neq \emptyset$ を V の既約閉集合の減少列とするとき，CV_n はアフィン空間内で原点を通る直線であるから，列 $CV = CV_0 \supsetneq CV_1 \supsetneq \cdots \supsetneq CV_n \supset \{0\} \neq \emptyset$ を得る．これが極大列になっていればよいのであるが…．キチンと示すには，座標環の次元を考える必要があるので，ここでは省略する．■

定義 73（代数曲線，代数曲面，高次元代数多様体）　1 次元射影代数多様体を**代数曲線** (algebraic curve), 射影曲線 (projective curve)，または単に曲線 (curve) などという．2 次元射影代数多様体を**代数曲面** (algebraic surface)，射影曲面 (projective surface)，または単に曲面 (surface) などという[*3]．3 次元以上の射影代数多

[*3] このように呼ぶときはさらに非特異性を仮定することもあるので注意が必要である（2 章参照）．

様体は**高次元代数多様体** (higher dimensional algebraic variety) と呼ばれる．n 次元代数多様体は英語で n-**fold** ともいう． □

注意 74（リーマン面） 射影代数多様体のここで定義した意味での次元は複素次元と一致しており，立場を変えて実次元でトポロジー的にみれば，特異点をもたない代数曲線は 2 次元の実多様体（トポロジーの意味での曲面）である．このことから，特異点を持たない射影代数曲線は複素幾何およびトポロジーの分野では**リーマン面** (Riemann surface) よ呼ばれている．リーマン面は多様体論と複素解析学の知識で勉強できるので，代数幾何学の雰囲気や道具立てを知るためにまずリーマン面の理論から入門するということもできる．リーマン面については沢山の本が出版されている ([4][19]) 他，都数の会員による記事もある ([22][27])．リーマン面に限らない複素多様体の観点から代数幾何を解説した本としては [6] が名著と名高い[*4]． □

■有理関数と有理写像 次に，アフィンの場合と同様にして射影空間上の関数を考えてみよう．単純に多項式 $f \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ について，

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{A}^1 = \mathbb{C} \\ [x_0 : \cdots : x_n] &\longmapsto f(x_0, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

で定めてしまうと，これが斉次座標に関して well-defined，すなわち任意の $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ について $f(x_0, \ldots, x_n) = f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)$ であるためには，f は定数関数にならなければいけないことが分かる．実際，f は m 次多項式であるとして，f の i 次部分を $f^{(i)}$ と表せば，

$$f = f^{(m)} + \cdots + f^{(1)} + f^{(0)}$$

である．$x \in \mathbb{P}^n$ に対し，$f^{(i)}(\lambda x) = \lambda^i f^{(i)}(x)$ であることより，任意の $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ について $f(x) = f(\lambda x)$ であるならば，

$$\lambda^m f^{(m)}(x) + \cdots + \lambda f^{(1)}(x) + f^{(0)} = f(x)$$

となる．これはいずれかの $i = 1, \ldots, n$ について $f^{(i)}(x) \neq 0$ であれば λ に関する多項式とみることができるが，上の等式が任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ について成り立つことは，l 次多項式は高々 l 個の解しか持たないことに矛盾している．よって，$f^{(m)} = f^{(m-1)} = \cdots = f^{(1)} = 0$ であるから，$f = f^{(0)}$ となり，f は定数関数になるのである．以上からわかる肝腎なことは，射影空間上には全体で（すなわち大域的に）定まる関数はほとんどないということである．

もうひとつ，今度は射影空間内の有理写像（rational map）というものを考えてみよう．$f_0, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ を l 次の同次多項式とする．これを用いて射影空間の間の "射"を，

$$\begin{aligned} F : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^m \\ x = [x_0 : \cdots : x_n] &\longmapsto [f_0(x) : \cdots : f_m(x)] \end{aligned}$$

で定めてみよう．$f_0, \ldots, f_m$ が全て同じ次数の同次式であることから，一見これは射影空間の間の（集合的な意味での）写像を与えているようにみえる．しかしよく考えれば，$f_0(x) = \cdots = f_m(x) = 0$ のとき $[f_0(x) : \cdots : f_m(x)] = [0 : \cdots : 0]$ は射影空間 $\mathbb{P}^m$ の点にならない．すなわち射影空間 $\mathbb{P}^n$ の射影代数的集合，

$$V = V_+(f_0, \ldots, f_m) = \{x \in \mathbb{P}^n \mid f_0(x) = \cdots = f_m(x) = 0\}$$

[*4] 長い間絶版だったが，2015 年 1 月に新装版として復刊された．

上では，“射”F は写像として定義されていない．射影空間上で全体に定義される関数や写像を考えることは難しいことなのである．

しかし，ここで逆に「全体で定義されていなくてもいいや」と考えることにする．上の “射”F も裏を返せば開集合 $D = D_+(f_0, \dots, f_n) = \mathbb{P}^n \setminus V$ 上では定義されているので，この写像として定義できる範囲の開集合 D と組にして $(D, F) : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ で表し**有理写像**（rational map）と呼ぶことにする．有理写像 (D, F) の D を有理写像の定義域（domain）という．ザリスキ位相は開集合が大きいので “大体全体で定まっている” 射についてこのような定義が許されるのである．特に，射影直線を値域に持つ有理写像 $V \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ を有理関数という．有理写像という名前は，例えば $D_+(f)$ 上で定義された有理関数 $f' : D_+(f) \to \mathbb{P}^1$ は，大域的には**有理関数**（または分数多項式）f'/f によって定まっていると考えれば腑に落ちるだろう．また，２つの有理写像 $(D, F), (D', F')$ はある開集合 $D'' \subset D \cap D'$ において $F_{|D''} = F'_{|D''}$ となるとき同値であるという．厳密にはこのような同値関係で類別した上での各類を有理写像というが，この場ではあまり気にせず (D, F) の形のものを有理写像と呼んでしまうことにする．気をつけたいのは，$D = \mathbb{P}^n$ であってもなんら問題はないことである．

有理写像 $(D, F) : \mathbb{P}^m \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ が，ある開集合 $D' \subset \mathbb{P}^m$ に関して同型 $F : D \xrightarrow{\sim} D'$ を与えている（すなわちこの逆写像が作れる）とき，(D, F) は**双有理写像**（birational map）であるという．双有理同値な多様体は同型であるとは限らないが，ザリスキ位相は上でも述べたように開集合が大きいので，“大体の部分が同じである” というのが双有理同値の直感的な解釈である．

一般の代数多様体 V, V'（といっても定義してないが，ここでは射影代数多様体など...）についても，同様に開集合 $U \subset V$ と射 $\tilde{f} : U \to V'$ の組を定義して，$(U, \tilde{f})$ を有理写像と呼ぶことにする．特に，代数多様体の間に双有理写像が存在するとき，２つの代数多様体は**双有理同値**（birational equivalent）であるという．後で紹介する**ブローアップ**（blowing-up）はこの双有理写像の重要な例を与えている．

例 75　なにも射影空間全体で定義される非自明な射がないわけではない．

$$\begin{aligned} \mathrm{v}_2 : \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ [x_0 : x_1 : x_2] &\longmapsto [x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2] \end{aligned}$$

は $\mathbb{P}^2$ 全体で定義されている写像であり，2 次の **Veroneze 写像**とよばれている．　□

例 76　単純に，

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{n+1} &\dashrightarrow \mathbb{P}^n \\ [x_0 : x_1 : \cdots : x_{n+1}] &\longmapsto [x_1 : \cdots : x_{n+1}] \end{aligned}$$

で定義される有理写像を考えよう．これは $\bigcup_{i=1}^{n+1} D_+(x_i)$ を定義域に持つ有理写像である．　□

注意 77　１次元の代数多様体（すなわち代数曲線）に比べて高次元の多様体は沢山ある．従って何らかの分類を考えたいときに多様体一つ一つをみるのではなく，何かの同値関係でまず代数多様体を区別しておいて，その上で各類同士の分類を考えようとするのは自然なことであろう．では，“どのような同値関係を採用するのがよいか” ということになるが，そこでこの双有理同値を採用して多様体の分類理論を構築しようというのが**双有理幾何学**（birational geometry）の大まかな考え方である．実際，双有理同値な多様体同士は数多くの性質を共有し，次元をはじめとする代数多様体の重要な量が双有理同値の不変量となる．例えば，曲面を分類するときに重要な不変量である小平次元 (Kodaira dimension) は双有理不変量のひとつである．よって，数多くある高次元の代数多様体の中で双有理同値なものは，ほぼ同じ多様体であると見なしてもよいのである．さ

らに，この双有理同値な多様体たちの間で一番 “カンタン” なものを見つければ，それを研究することでそれと双有理同値な多様体のことが分かったことになる．この “カンタン” な多様体を**極小モデル**（minimal model）というが，“この極小モデルが本当に存在するか” ということが難しい問題で，双有理幾何学の中心問題である．2 次元のものは古典的に知られており，3 次元は森重文先生によって完成された．4 次元も Shokurov の活躍によりほとんどできているらしい．双有理幾何については [14] が定評ある教科書である．[9] にも若干の解説がある．最新の MMP の諸相については最近 [10] が出版された． □

注意 78　ちなみに，与えられた 2 つの代数多様体が互いに双有理同値であるかを判定することは一般には非常に難しい問題で，未解決なものも沢山ある． □

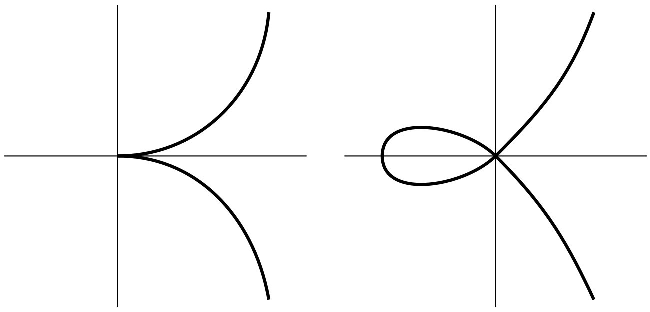
注意 79　この有理写像の定義は，既約，すなわち任意の開集合が稠密であるという，代数多様体の性質に大きく依存している．既約性が期待できないようなスキーム上で有理写像を考えたい場合は，スキーム的開稠密という概念を準備して，その上のスキームの射を考えることで有理写像を定義する． □

注意 80　整スキームに対して，その関数体というものを考えることができる．アフィン多様体に関しては，この関数体はアフィン座標環 $\Gamma(V)$ の商体に一致する．射影代数多様体に関しては，その関数体はあるアフィン開集合の関数体と一致する．実は $\mathbb{C}$ 上局所有限型のスキームに関しては，その関数体は複素数体 $\mathbb{C}$ の超越拡大になる（Hilbert の零点定理の別の形）．スキームに対しその関数体を対応させる関手は，複素数体上有限型整スキームを対象とし支配的（すなわち像が稠密になる）有理写像を射とする圏と，複素数体の有限生成超越拡大体の圏の間の圏同値を与える．特に，多様体が双有理同値であるための必要十分条件は，その関数体が $\mathbb{C}$ 同型になることである． □

2　代数幾何学の展望〜特異点とブローアップ〜

2.1　特異点

特異点という言葉を聞いたことがない人はいないであろう．幾何学における特異点とは，その点で多様体が“滑らかでない”ような点である．$x^3 - y^2 = 0$ や $x^2(x+1) - y^2 = 0$ のグラフを $\mathbb{R}^2$ 上で図示してみよ．原点の部分が「特異」と呼ぶに相応しい形をしているであろう．これが特異点である．通常のユークリッド位相で考えると局所構造が自明であるから特異点のようなものは扱えない．しかし，Zariski 位相は開集合が大きいので特異点を許したような図形を取り扱うことが可能になる．特異点を持った図形を取り扱えるのは代数幾何学の特徴である．



$x^3 - y^2 = 0$　　　$x^2(x+1) - y^2 = 0$

では，特異点を実際に定義してみよう．どのようにするのがよいであろうか．上に挙げた例をよく観察すると，特異点と呼ぶに相応しい点においては，グラフの接線を考えることができないことに気づく．このように接線，より一般に接空間に着目して特異点を定義することができる．ここで，今度は「その接空間を如何に定義するとよいか」という問題が発生する．特異点を定義する別の方法を考えてみよう．上の例をもう一度よくみると，特異でない「滑らかな」点に十分近い近傍では，グラフは「x の y に関する微分可能な関数」または「y の x に関する微分可能な関数」のようにみることができることがわかる．ここで微積分で勉強した陰関数定理を想起されたい．これが特異点に関するもう一つの定義を与える．

ここで，なぜ特異点を考えるかについて少しだけ述べておく．代数幾何における数々の理論，定理の多くには特異点がない滑らかな多様体上でのみ成り立つような主張が多くある．裏を返せば，多様体に特異点を許した場合に使用不能になる道具が山ほどあって，途端に多様体やそれに付随する様々なものの情報が得られなくなってしまうのである．よって，一つの考え方としてはそのような面倒ごとを避けるために，特異点付きの多様体を一切考えず smooth 星人となって生きるという道がありうる．しかし，多様体に特異点を許した議論によってこれまで困難だった議論が本質的に進む場合もある．極小モデル・プログラムでは多様体を収縮し，より性質のよい多様体を作っていくが，3 次元以上では収縮して得られた多様体に特異点が現れてしまう場合がある．曲面の場合は収縮後の多様体は常に滑らかであるので極小モデル・プログラムは簡単であるが，3 次元以上では難しくなってしまう．日本のフィールズ賞受賞者である森重文先生はこのときに現れる特異点を研究・分類することで 3 次元の極小モデル理論を完成させた．余談であるが，特異点の理論と表現論や組合せ論が関係することもある．特異点は代数幾何を難しくする一因であるが，その分奥が深い．

定義 81（ザリスキ接空間）　多項式環のイデアル $\mathfrak{a} \subset \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ について，$\mathfrak{a}$ の線型部分を，$\mathfrak{a}$ の各元の

1 次部分から生成されるイデアルとして定義し，$\mathfrak{a}^1$ で表す．アフィン代数多様体 $V = V(\mathfrak{p}) \subset \mathbb{A}^n$ でアフィン空間の通常の座標に関する原点 $0 \in \mathbb{A}^n$ を含むものに関して，V の原点における **Zariski 接空間**（Zariski tangent space）を $T_0V := V(\mathfrak{p}^1)$ で定める．原点でないような点も原点に平行移動することで接空間 T_xV が定義できる． □

例 82 (i) $V = V(X-Y) \subset \mathbb{A}^2$ において，$\mathfrak{p} = (X-Y)$ の各元は $f(X-Y)$ の形であり，その 1 次部分は 0 または $\lambda(X-Y)$ である．よって $\mathfrak{p}^1 = (X-Y)$ であるから原点の Zariski 接空間は $T_0V = V(X-Y) = V$ である．

(ii) $V = V(X^2-Y) \subset \mathbb{A}^2$ において，$\mathfrak{p} = (X^2-Y)$ の各元は $f(X^2-Y)$ の形であり，その 1 次部分は 0 または λY である．よって $\mathfrak{p}^1 = (Y)$ であるから原点の Zariski 接空間は $T_0V = V(Y)$ である．

(iii) $V = V(X^3-Y^2) \subset \mathbb{A}^2$ において，$\mathfrak{p} = (X-Y)$ の各元は $f(X^3-Y^2)$ の形であり，その 1 次部分は常に 0 である．よって $\mathfrak{p}^1 = (0)$ であるから原点の Zariski 接空間は $T_0V = V(0) = \mathbb{A}^2$ である．ここで，$\dim(V) < \dim(T_0V)$ となってしまったことに気をつけよう．特異点であることと Zariski 接空間の次元には関係があるのである．これが以下での特異点の定義となる． □

演習 83 $V = V(X^2(X+1)-Y^2)$ の原点における Zariski 接空間を求めよ．また，その次元はどうなっているか． □

ここで，アフィン空間のみに Zariski 接空間を定義したが，一般の代数多様体についても局所的にはアフィンであるということから，Zariski 接空間を同様に定義できる．今後も全て局所的な話になることから，多様体はアフィンなものに制限して考えることにする．アフィンで考えることと，そのアフィン座標環を考えることは同じことなので，特異点論は代数幾何学の中でも特に可換環論と関連が深い分野である．実際に特異点論と可換環論は同時に研究される．

定義 84（特異点） V をアフィン代数多様体とする．V の点 $x \in V$ において $\dim(V) = \dim(T_xV)$ となるとき，V は x で滑らか（smooth）または正則（regular）であるという．このときまた x は V の正則点（regular point）や滑らかな点（smooth point）であるという．滑らかでない点を V の**特異点**（singular point）という．特異点が存在しない，すなわち至る所滑らかである多様体は**滑らか**（smooth）であるという． □

例 85 (i) $V = V(X-Y)$ は滑らかな多様体である．

(ii) $V = V(X^2-Y)$ も滑らかな多様体である．

(iii) $V = V(X^3-Y^2)$ は原点のみ特異点である．

(iv) $V = V(X^2(X+1)-Y^2)$ も原点のみを特異点に持つ． □

注意 86 一般に $\dim(V) \le \dim(T_xV)$ となる．これは次の注意の同型を用いて可換環論で証明する．詳しい説明は可換環論の教科書に譲ろう． □

注意 87 点 $x \in V$ に対応する極大イデアル $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x \subset \Gamma(V)$ に関して，$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての同型，

$$T_xV \simeq (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \mathbb{C})$$

が存在する．逆に一般の体上有限生成環について極大イデアルは幾何学的な点と考えることができるが，この点における接空間を上の同型を用いて定義することができる． □

注意 88　さらに，短完全列

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow \Gamma(V)_{\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

について，$\mathrm{Hom}_{\Gamma(V)_{\mathfrak{m}}}(-, \Gamma(V)_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m})$ の導来関手のコホモロジー長完全列を考えると，同型

$$T_x V \simeq \mathrm{Ext}^1_{\Gamma(V)_{\mathfrak{m}}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

が得られる．すなわち，両端が $\mathbb{C}$ であるような $\Gamma(V)_{\mathfrak{m}}$ 加群の短完全列を，$\mathfrak{m}$ に対応する多様体 X の点における接ベクトルと考えることが出来るのである．この同一視は接空間のホモロジー代数的な文脈における取り扱いを容易にする．このように多様体の接空間にはそのときどきにあった適切な表示がいろいろあるのである．□

特異点を判定するには，次の **Jacobi 判定法**が便利である．

命題 89　$V = V(f_1, \ldots, f_m) \subset \mathrm{A}^N$ を n 次元のアフィン代数多様体とする．このとき，点 $x \in V$ が滑らかな点であるための必要十分条件は，

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1}(x) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial X_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial X_N}(x) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial X_N}(x) \end{pmatrix} = N - n$$

となることである．□

特に，余次元 1 の部分多様体，すなわち超平面 $V = V(f) \subset \mathbb{A}^N$ に関しては，$x \in V$ が滑らかであるための必要十分条件は，いずれかの $i = 1, \ldots, N$ に関して $(\partial f/\partial X_i)(x) \neq 0$ となることである．

例 90　(i)　$f = X - Y$，$V = (f) \subset \mathbb{A}^2$ について，$(\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y) = (1, -1)$ である．これは任意の $x \in V$ について零ベクトルにならない．よって V は滑らかである．

(ii)　$f = X^2 - Y$，$V = (f) \subset \mathbb{A}^2$ について，$(\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y) = (2X, -1)$ である．これも任意の $x \in V$ について零ベクトルにならない．よって V は滑らかである．

(iii)　$f = X^3 - Y^2$, $V = (f) \subset \mathbb{A}^2$ について，$(\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y) = (3X^2, -2Y)$ である．これは $x = (0,0) \in V$ についてのみ零ベクトルになる．よって V は原点のみを特異点にもつ．

(iv)　$f = X^2(X+1) - Y^2$，$V = (f) \subset \mathbb{A}^2$ について，$(\partial f/\partial X, \partial f/\partial Y) = (3X^2 + 2X, -2Y)$ である．これは $x = (0,0) \in V$ についてのみ零ベクトルになる．よって V は原点のみを特異点にもつ．□

始めの定義ではある 1 点が特異点であることしか判定できなかったが，Jacobi 判定法を用いると連立方程式を解くことで特異点を全て見つけることが出来る．

注意 91　特異点 $x \in V$ はある近傍が $U \ni x$ が存在して U の中の特異点が x のみであるとき，孤立特異点であるという．代数多様体の類似として正則関数の共通零点として定義される図形を解析空間というが，解析空間についても同様に特異点を定義することができる．実は解析空間の孤立特異点は代数的なもの同型であると考えることが出来る（Artin の代数化定理）．この同型をこの場で厳密に説明することは出来ないが，例えば $(x-y)(x+y) = 0$ と $\sin(x-y)\sin(x+y) = 0$ は原点を特異点にもつが，２つの関数は原点付近で同じものとみなせると説明すれば，雰囲気は伝わるであろうか．古くから代数幾何学と複素幾何学の理論の間には多くの類似または一致が知られていたが，最近は複素幾何学の方面でも特異点を許した多様体の研究が行われているようである．□

次に，代数多様体の中にどのようにして特異点が現れてくるのかをみよう．特異点の現れ方にはいくつも種類があるが，一つの典型的かつ重要なパターンは割って作られる**商特異点** (quotient singularity) とよばれるものである．

例えば，巡回群 $\mathcal{C}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} := \{1, -1\}$ を考えよう．この $\mathcal{C}_2$ は $\mathbb{A}^2 = \mathbb{C}^2$ について $\sigma \cdot (a, b) := (\sigma a, \sigma b)$ により $\mathbb{A}^2$ への作用 $\mathcal{C}_2 \curvearrowright \mathbb{A}^2$ をもつ．この作用において，(a, b) と $(-a, -b)$ は互いに移りあう点である．このとき，$x = a^2, y = b^2, z = ab$ の値は作用によって変化せず，尚且つ関係式 $xy - z^2 = 0$ を満たしている．これを作用に関する不変式という．この不変式は $R = \mathbb{C}[a, b]$ の部分環,

$$R^{\mathcal{C}_2} := \mathbb{C}[a^2, b^2, ab] \simeq \mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY - Z^2)$$

を生成している．これを不変式環という．この不変式環を座標環に持つようなアフィン多様体はもちろん $V = V(XY - Z^2)$ であるが，これは X を $X - Y$ に，Y を $X + Y$ に取り替えることで $V' = V(X^2 - Y^2 - Z^2)$ で定まるアフィン多様体になっている．アフィン代数多様体 $V(X^2 - Y^2 - Z^2)$ は，計算すれば分かるように，原点に特異点をもつ．

逆に，$xy - z^2 = 0$ を満たす $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$ をとる．このとき，$x = a^2, y = b^2, z = ab$ を満たす組 $(a, b) \in \mathbb{C}$ が，(a, b) と $(-a, -b)$ の差を除いて一意に定まる．よって，このアフィン多様体の各点は上で定めていた作用の軌道と 1 対 1 に対応しており，軌道のパラメーター空間になっている．より正確には次のことが成り立つ．

命題 92　特殊線型群 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の有限部分群 G の $\mathbb{C}^2$ への作用について**不変式環** (invariant ring) R^G というものが定まる．このとき，R^G は有限型 $\mathbb{C}$ 代数，すなわち同型 $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N]/\mathfrak{a} \simeq R^G$ が存在し，作用の軌道には全単射

$$\mathbb{C}^2/G = V(\mathfrak{a}) \ (= \operatorname{Spm} R^G)$$

によって代数多様体の構造が定まる．　□

不変式環の計算は直接与えたが，これは有限群の表現論を用いて計算することも出来る．不変式環の決定は数学の中でも歴史が古く昔から研究されている．不変式論を用いて商空間として**モジュライ** (moduli) を構成するという話もある．この方面についての文献としては，雰囲気を掴むための入門書としては [15]，より専門的な知識が欲しい場合は [16] が決定版である．但し，後者を読みこなすには代数幾何学のスキーム論およびコホモロジー論による基礎付けをしっかり学んでおく必要がある．ちなみに都内数学科学生集合の先輩によるすばらしい記事もある [24].

上の計算例で得られた多項式 $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ の原点に現れる特異点は A_1 型であるという．このように $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の有限部分群による作用の商に現れる特異点を **Klein 特異点**（Kleinian singularity）というが，これは $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の有限部分群の分類と対応して以下のような分類がある．

$$\begin{aligned}
A_n \text{ 型：}\ & x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0 \\
D_n \text{ 型：}\ & x^2 + y^2 z + z^{n-1} = 0 \\
E_6 \text{ 型：}\ & x^2 + y^3 + z^4 = 0 \\
E_7 \text{ 型：}\ & x^2 + y^3 + yz^3 = 0 \\
E_8 \text{ 型：}\ & x^2 + y^3 + z^5 = 0
\end{aligned}$$

これらは次節で定義するブローアップというもので特異点の解消を考えたときに，その例外集合というものの交わり方によって各型のディンキン図形にというものに対応する．これらに関しては [13] を参照するとよいと思う．他にも特異点に関する魅力的な話題は尽きないが，それはまた別の機会に譲ることにして，とりあ

えず特異点の基本事項に関する説明を終わりにする．特異点論を本格的に勉強するには，それなりの代数幾何学の基礎付けおよび可換環論のハードなものを学んだ上で [7] または [9] を読まれるとよいと思う．

2.2 ブローアップ

特異点をもつ多様体を研究するための方法として，特異点を爆発させる（ブローアップ，blowing-up）という操作がある．特異点を爆発させて作った新しい多様体はもとの多様体と双有理同値になり，しかも特異点を持たない滑らかな多様体になることがある．前章で述べた通り，双有理同値な多様体は多くの情報を共有するから，このようにして滑らかにした多様体上での計算結果が，そのままもとの特異点付きの多様体の情報を教えてくれるのである．複素数体上の代数多様体に関してはブローアップを繰り返すことで特異点のない滑らかな多様体を得ることが出来ることが知られている（広中の特異点解消定理）．正標数の多様体に関してはこの問題は未解決である．

定義 93（ブローアップ） $n \geq 2$ とする．n 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ について，

$$\widetilde{\mathbb{A}^n} := \{(x_1, \ldots, x_n)[a_1 : \cdots : a_n] \in \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \mid 任意の\ i < j\ に対し，a_j x_i = a_i x_j\ となる．\}$$

と自然な射影との合成 $\varphi : \widetilde{\mathbb{A}^n} \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \to \mathbb{A}^n$ を，$\mathbb{A}^n$ の原点を中心とする**ブローアップ**（blowing-up）という．

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathbb{A}^n} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi"'] & \mathbb{A}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \arrow[d] \\
& \mathbb{A}^n
\end{tikzcd}$$

原点を含むアフィン代数多様体 $V \subset \mathbb{A}^n$ については，V の原点を中心とするブローアップを $\tilde{V} := \overline{\varphi^{-1}(V \setminus \{0\})}$ によって定める．原点以外の点においても平行移動することでブローアップを定義できる． □

ここで計算上重要なことは，開集合 U_i を

$$U_i := \{(x_1, \ldots, x_n)[a_1 : \cdots : a_n] \in \widetilde{\mathbb{A}^n} \mid a_i \neq 0\}$$

と定めると，$\widetilde{\mathbb{A}^n} = \bigcup_{i=1}^n U_i$ であり，さらに各 U_i はアフィン空間と同型になっていることである．よって，このアフィン開被覆を用いて特異点の場所が計算できるのである．

注意 94 $\varphi^{-1}(0)$ は $\mathbb{P}^n$ と同型であり，有効 Cartier 因子とよばれるものになっている．これをブローアップの**例外因子**という．実は，ブローアップは代数多様体のカテゴリーにおいてこの条件を満たすようなもので普遍的なものとしての特徴付けがある．一方 $\varphi^{-1}(\mathbb{A}^n \setminus \{0\}) \simeq \mathbb{A}^n \setminus \{0\}$ である．すなわち稠密開集合における同型を与えているのでこの射は双有理写像である． □

注意 95 $S = \mathbb{C}[T_1, \ldots, T_n]$ を多項式環，$I = (T_1, \ldots, T_n)$ を原点に対応する極大イデアルとする．$B = \bigoplus_{d \geq 0} I^d$ とする．ここで T_i を B_0 の元としてみるか B_1 の元としてみるかを区別しておく必要がある．

$$\begin{aligned} S[X_1, \ldots, X_n] &\longrightarrow B \\ X_i &\longmapsto T_i\ (\in B_1) \end{aligned}$$

で定めると，この準同型の核は $T_i X_j - T_j X_i$ たちで生成されるイデアルである．以上から同型

$$\operatorname{Proj} B \simeq V_+((T_i X_j - T_j X_i)_{i,j}) \subset \mathbb{P}_S^{n-1} \simeq \mathbb{P}^{n-1} \times_{\mathbb{C}} \operatorname{Spec} S = \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{A}^n$$

を得る．この観察によって，点に限らない一般の閉部分多様体についてどのようにブローアップを定義すればよいのかが分かる．実際，特異点解消は多くの場合に点のブローアップだけでは不十分である．ここで用いた記号についてはなにかしらの代数幾何の本を参照されたい． □

では，実際ブローアップを繰り返して特異点を解消してみよう．

例 96　A_n 型特異点の解消をしてみよう．$X = V(X^2+Y^2+Z^{n+1}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{A}^23 \mid x^2+y^2+z^{n+1} = 0\}$ をブローアップする．閉包をとる前の引きもどしを $X_0 := \varphi^{-1}(X \setminus \{0\})$ とおく．

まず，U_1 において，$X_0 \cap U_1$ を考える．

$$X_0 \cap U_1 = \{(x,y,z)[a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid a_2x = a_1, a_3x = a_1z, a_3y = a_2z, a_1 \neq 0, (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$$

である．$y' = a_2/a_1, z' = a_3/a_1$ とおけば，$y = y'x, z = z'x$ であり，これを $x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$ に代入すると，

$$x^2(1 + y'^2 + z'^{n+1}x^{n-1}) = 0$$

であり，今は $x \neq 0$ であるから，

$$X_0 \cap U_1 = \{(x,y',z') \mid 1 + y'^2 + x^{n-1}z'^{n+1} = 0, (x,y',z') \neq 0\}$$

となる．よって，

$$\widetilde{X} \cap U_1 = V(1 + y'^2 + x^{n-1}z'^{n+1}) \subset \mathbb{A}^3$$

となる．$f = 1 + y^2 + x^{n-1}z^{n+1}$ とおけば，$n \geq 2$ のときは，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \big((n-1)x^{n-2}z^{n+1}, 2y, (n+1)x^{n-1}z^n\big)$$

$n = 1$ のときは，$\widetilde{X} \cap U_1 = V(1 + y^2 + z^2)$ であり，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (0, 2y, 2z)$$

となり，いずれの場合も $\widetilde{X}$ 上では零ベクトルにならず，したがって $\widetilde{X} \cap U_1$ は滑らかである．

同様に，$\widetilde{X} \cap U_2$ も滑らかなアフィン代数多様体であることが分かる．

では，U_3 上ではどうか計算してみよう．

$$X_0 \cap U_3 = \{(x,y,z)[a_1 : a_2 : a_3] \in \mathbb{A}^3 \times \mathbb{P}^2 \mid a_2x = a_1, a_3x = a_1z, a_3y = a_2z, a_3 \neq 0, (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$$

である．$x' = a_1/a_3, y' = a_2/a_3$ とおけば，$x = x'z, y = y'z$ であり，これを $x^2 + y^2 + z^{n+1} = 0$ に代入すると，

$$z^2(x'^2 + y'^2 + z^{n-1}) = 0$$

であり，今は $z \neq 0$ であるから，

$$X_0 \cap U_3 = \{(x',y',z) \mid x'^2 + y'^2 + z^{n-1} = 0, (x',y',z) \neq 0\}$$

となる．よって，

$$\widetilde{X} \cap U_3 = V(x'^2 + y'^2 + z^{n-1}) \subset \mathbb{A}^3$$

となる．$f = x^2 + y^2 + z^{n-1}$ とおけば，$n \geq 2$ のときは，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(2x, 2y, (n-1)z^{n-2}\right)$$

であり，$n > 2$ のときは原点が A_{n-2} 型特異点，$n = 2$ のときは滑らかになる．$n = 1$ のときは，$\widetilde{X} \cap U_3 = V(x^2 + y^2 + 1)$ であり，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2x, 2y, 0)$$

であるが，これは $\widetilde{X} \cap U_3$ 上では零ベクトルにならず，よって滑らかである．

以上をまとめると，A_n 型特異点は一回ブローアップすると，$n = 1, 2$ のときは滑らか，$n > 2$ のときは A_{n-2} 型の特異点になる．よって，ブローアップを繰り返すことで A_n 型特異点は解消することが出来る．□

演習 97　D_n 型，E_6, E_7, E_8 型の特異点をブローアップを繰り返すことで解消せよ．□

注意 98　ブローアップに現れる例外因子は，それ自体が幾何学的対象として非常に重要である．□

最後に，有名な**広中の特異点解消定理**にを引用してこの節を終わりにしよう．

定理 99 **（広中の特異点解消定理）**　代数多様体 X について，ブローアップの列

$$Y = X_n \xrightarrow{\mu_n} X_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{\mu_1} X_0 = X$$

で，

(i) Y は滑らかである．
(ii) 各ブローアップ $\mu_i : X_i \to X_{i-1}$ の中心 V_i は滑らかで，X_{i-1} の特異点集合に含まれる．
(iii) X_i は V_i に沿って normally flat である．

となるようなものが存在する．ここで，代数多様体は標数 0 の体上で定義されているとする．□

このブローアップを繰り返すことで特異点を解消できるという広中の特異点解消定理は，特異点がある場合の多様体の研究に強力な手法を提供している．この定理と小平の消滅定理により，標数 0 の代数幾何学は正標数の場合よりも大きく発展していると言って過言でない．この広中の特異点解消定理は正標数での成立も期待されており，定理を正標数の体上にまで拡張しようという試みがなされているが，現在に至るまでの 50 年間未解決のままである．

3　代数幾何学の展望〜因子と有理写像〜

ある代数多様体を考えたとき，その多様体よりも次元が一つ低い部分多様体たちを因子というが，これはもとの多様体の幾何学的な性質と大きく関係する．例えば，ある因子たちの同値類は多様体から射影空間への有理写像を定める．これが実際に多様体の射になるかということや，より強く埋め込みになるかということは因子の性質によって決まる．多様体が射影空間への埋め込みを持つかということは非常に重要な問題であるが，これらを因子を用いて調べることが出来るのである．よって，多様体があった場合にその上の因子を研究することは極めて基本的であるが，この因子の性質は "他の因子たちとどのように交わるか" という交点数というものを考えることによって明らかになる．交点数は，因子全体に形式的に和を入れて考えることで因子から定まる Abel 群上の線形形式になる．代数多様体は連立多項式の共通零点の貼り合わせとして定義されるので極めて非線形な対称であるが，この交点数を用いることで代数多様体の研究に線型代数的な手法を用いることができる．ここでは入り口のほんの一端の様子を解説したい．この節は著者の力量不足が原因でかなりの難産だった．間違いを恐れず感覚的な説明をした場所も数カ所あるし，そもそも定義もせずに用いた言葉も沢山ある．読まれる際には鵜呑みにせず，あとで他の本でキチンと学びなおされることを勧める．

3.1　射影平面上の線形系

d 次斉次多項式で張られるベクトル空間

$$\Gamma(\mathcal{O}(d)) = \left\{ \sum_{i_0+\cdots+i_n=d} a_{i_0,\ldots,i_n} x_0^{i_0}\cdots x_n^{i_n} \mid a_{i_0,\ldots,i_n} \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{C}[x_0,\ldots,x_n]$$

を考える．これは基底 $\{x_0^{i_0}\cdots x_n^{i_n}\}$ をもつ．このベクトル空間の部分ベクトル空間を線形系 (linear system) という．特に $\Gamma(\mathcal{O}(d))$ 自身を射影空間上の**完備線形系** (complete linear system) であるという．線形系は多様体から射影空間への有理写像を定める．

たとえば，$n=2, d=2$ のときは $x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2$ が $\Gamma(\mathcal{O}(2))$ の基底であり，これが張るベクトル空間が完備線形系 $\Gamma(\mathcal{O}(2))$ である．これらの多項式を $\mathbb{P}^2$ 上の関数だと思うと，Veronese 写像

$$v_2 : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^6;\quad [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1^2 : x_1x_2 : x_2^2]$$

が定まる．またこの部分ベクトル空間 $V_1 = \langle x_0^2, x_1^2, x_2^2\rangle \subset \Gamma(\mathcal{O}(2))$ も，写像

$$\Phi_{V_1} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2;\quad [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0^2 : x_1^2 : x_2^2]$$

を定義する．Veronese 写像は単射，すなわち埋め込みになるが，この Φ_{V_1} は埋め込みにならない．別の部分ベクトル空間 $V_2 = \langle x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2\rangle \subset \Gamma(\mathcal{O}(2))$ を考える．これから定まる

$$\Phi_{V_2} : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2;\quad [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2]$$

を考えると，この写像は $V_+(x_0) \subset \mathbb{P}^2$ で定義されない．これに含まれる線形系 V_2 の点を**固定点** (fixed point) という．固定点集合は

$$\bigcap_{(a,b,c)\in\mathbb{C}^3} V_+(ax_0^2 + bx_0x_1 + cx_0x_2)$$

に一致している．固定点でない部分 $D_+(x_0) = \mathbb{P}^2 \setminus V_+(x_0)$ は V_2 の**可動部** (movable point) という．先ほどみたように Φ_{V_1} は固定点をもたない．このようなときは線形系は**自由** (free) であるという．また，完備線形

系自身 $\Gamma(\mathcal{O}(2))$ は射影空間への埋め込みを定義するが，このような線形系を**非常に豊富な線形系** (very ample linear system) という．ここまでで分かるように線形系はその次元が高くないと埋め込みにならない．これが豊富という名前の所以だと思う．

別の場合を考えよう．$n=2, d=1$ の場合の完備線形系 $\Gamma(\mathcal{O}(1)) = \langle x_0, x_1, x_2\rangle$ 自身が定める有理写像は，

$$\mathrm{id} : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2; [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0 : x_1 : x_2]$$

で恒等写像である．これは特に埋め込みであるから，この線形系は非常に豊富である．また，別の基底 $x_0+x_1, x_1+x_2, x_2+x_0$ をとると

$$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^2; [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0+x_1 : x_1+x_2 : x_2+x_0]$$

は線形変換である．また別の基底をとれば違う線形変換が定まる．また線形系 $\langle x_0, x_1\rangle \subset \Gamma(\mathcal{O}(1))$ は射影

$$\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1; [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0 : x_1]$$

を定めている．この固定点は $V_+(x_0, x_1)$ である．

同じく $n=2$ の場合に，$d=-1$ としたらどうだろうか．このとき -1 次の多項式を考えることになるが，これは分数多項式 f/g で $\deg f - \deg g = -1$ で定義されるものである．しかしこのようなものは多項式環の中に含まれない．よって $\Gamma(\mathcal{O}(-1)) = 0$ である．

完備線形系の元は $\mathbb{P}^2$ の部分多様体を定める．たとえば，$x_0+x_1+x_2 \in \Gamma(\mathcal{O}(1))$ は $V_+(x_0+x_1+x_2)$ を定めているといった寸法である．$\Gamma(\mathcal{O}(d))$ の元は $\mathbb{P}^2$ の中の d 次曲線を定める．これらの交わりはどうであろうか．2 直線 $x_0=0$ と $x_1=0$ の交点は $[0:0:1] \in \mathbb{P}^2$ である．2 次曲線 $x_0^2+x_1x_2=0$ と直線 $x_0-x_1=0$ の交点は $[0:0:1], [1:1:0] \in \mathbb{P}^2$ の 2 点存在する．実はより一般に次が成り立つ．

定理 100（Bézout の定理）　$\mathbb{P}^2$ 上の m 次曲線 C と n 次曲線 D において，C と D が共通の既約成分を持たないとするとき，C と D の共通部分は空ではなく，かつ重複度をこめて mn 個の点からなる．■

この定理の弱い形の証明は H25 年度の夏季合宿で紹介した [26]．重複度というものを少し説明する．2 次曲線 $x_0^2+x_1x_2=0$ と直線 $x_1=0$ を連立すると $x_0^2=x_1=0$ である．すなわち 2 曲線は $[0:0:1] \in \mathbb{P}^2$ で接していて，連立方程式は重解を持つ．このような場合交点は 1 点のみであるが，これは $[0:0:1]$ で重複度 2 で交わっているという見方をすることで「交点は重複度を込めて 2 点である」という言い方をするのである．

大切なのはこのように曲線たちが “必ず交わる” ことである．実は，このように完備線形系の元に対応する部分多様体が，他の部分多様体たちとどのように交わるかということは，対応する線形系が射影空間への埋め込みを定めるかということと密接に関係している（**中井の判定法**という）．

注意 101（代数的スキーム）　ここで初めて $x_0=0$ と $x_0^2=0$ を明示的に区別して考える必要が出てきた．しかし，$x_0^2=0$ に対応するイデアル (x_0^2) を考えようとしても，このイデアルは被約イデアルでないからこれまでの枠組みでは扱えない．よって注意 57 のように代数多様体の概念を代数的スキームまで拡張して考える必要が出てくるのである．この場合，$V_+(x_0^2+x_1x_2)$ と $V_+(x_1)$ の位相空間的な交わりは $\{[0:0:1]\} = V_+(x_0, x_1)$ であるが，“スキーム論的な交わり” は「この上のスキーム構造を被約でないものに取り替えたもの」になる．このことを以下で説明する．

アフィン開集合 $D_+(x_2) = \{(x_0, x_1)\} = \mathbb{A}^2$ 上で原点 $(x_0=x_1=0)$ と重複度 2 の原点 $(x_0^2=x_1=0)$ の座標環を書き表せば，各々

$$A = \mathbb{C}[x_0, x_1]/(x_0, x_1) \quad と \quad B = \mathbb{C}[x_0, x_1]/(x_0^2, x_1)$$

である．これらの環の極大イデアルの集合 $\mathrm{Spm}(A)$ と $\mathrm{Spm}(B)$ は両方 $p = \{(0,0)\} \subset \mathbb{A}^2$ となりアフィン代数的集合としては一致するが，その上の座標環と組にして (p, A) と (p, B) で考えることで「普通の一点」と「重複度 2 の一点」を区別するのである．このような，アフィン代数的集合 X と $\mathrm{Spm}(R) = X$ となるような環 R の組 (X, R) を**アフィン代数的スキーム** (affine algebraic scheme) という．R をアフィン代数的集合 X のスキーム構造という．

アフィン代数的スキームを一般化して**射影代数的スキーム** (projective algebraic scheme) を定義するためには，射影代数的集合の各アフィン開集合のスキーム構造を "貼り合わせ" ることが必要になる．この "貼り合わせ" には層 (sheaf) の概念が用いられる． □

これが一般の射影代数多様体の線形系の理論を考える上でのモデルケースになる．

3.2 因子と線形系

線形系の元は，その元の零点集合として定まる部分多様体とある意味同一視できた[*5]．また，これらの部分多様体はもとの多様体より次元が一つ落ちる．これから射影代数多様体 X 上の完備線形系とはなにかを考えるが，まず先にこのような部分多様体たちを考えてみよう．X より次元が 1 低い，すなわち余次元が 1 の X の部分多様体を X 上の**素因子** (prime divisor) という．これらの形式的有限和の全体

$$\mathrm{Div}\, X := \{ \sum_{D:\text{素因子}} d_D D \mid d_D \in \mathbb{Z} \text{ で有限個を除いて } 0\}$$

の元を X 上の**因子** (divisor) という．因子 $D = \sum_i d_i D_i$ に関して $\mathrm{Supp}(D) := \bigcup_i D_i$ は閉集合でこれを因子 D の**台** (support) という．任意の i で $d_i \geq 0$ のとき因子 D は**有効** (effective) であるという．有理関数 f/g に対して因子を定めることができる．射影空間の場合に戻って考えると，$x_0 x_2 / x_1^2$ に対応する因子は $D_0 = V_+(x_0), D_1 := V_+(x_1), D_2 := V_+(x_2)$ としたときに $D = D_0 - 2D_1 + D_2$ である．だいたいこのように定めると思えばよい．有理関数から定まる因子を**主因子** (principal divisor) という．2 つの因子 D, D' は $D - D'$ が主因子であるとき**線形同値** (linearly equivalent) であるといい，$D \sim D'$ で表す．因子 D と線形同値な有効因子全体を $\Gamma(\mathcal{O}(D))$ で表し，D の**完備線形系** (complete linear system) という．

射影平面 $\mathbb{P}^2$ に戻って例をみよう．このとき，$\mathbb{P}^2$ の有理関数は (d 次斉次式)/(d 次斉次式) の形である．既約斉次多項式 f と $V_+(f)$ を同一視して考えて，D_f で表すことにしよう．既約でない多項式については $f = f_1 \cdots f_r$ と既約多項式に因数分解して $D_f := \sum_i D_{f_i}$ で定める．f, g が d 次の多項式なら f/g は $\mathbb{P}^2$ 上の有理関数なので $D_f - D_g$ は主因子，すなわち $D_f \sim D_g$ である．よりわかりやすくするために場合を制限して，$H = V_+(x_0)$ としたときに $2H$ に線形同値な有効因子を考えてみよう．これは 2 次斉次多項式全体である．実際，2 次斉次多項式 f に対して f/x_0^2 は有理関数であるから，$D_{x_0^2} = 2H \sim D_f$ である．すなわち完備線形系は $\Gamma(\mathcal{O}(2))$ である．

射影空間上の d 次斉次多項式は，射影空間上の $\mathcal{O}(d)$ 束というものの大域切断のなすベクトル空間の射影化に対応している．より一般に D の線形系は因子から定まる直線束 $\mathcal{O}(D)$ というものの大域切断のなすベクトル空間の射影化に対応している．これには今回考えた因子（**Weil 因子**という）以外に **Cartier 因子**というものを考える必要がある．Cartier 因子は Weil 因子を十分小さいアフィン開集合に制限したときに，それを定義する多項式をとってきて並べたようなものである．滑らかな多様体の上であれば両者の概念は一致するが，特異点をもつような場合には Weil 因子に対してそれを定義するような局所方程式が存在するとは限らない．

[*5] 関数とその零点の対応なので，中学校や高校で勉強した解と係数の関係と似たようなものである．

これらについては**層** (sheaf) の言葉を用いてやや複雑な定式化をしなければいけない．こういったものに関しても噛み砕いた説明ができればよかったが，それをするには著者はあまりに力量不足で断念せざるを得ない．

因子の線形系は直線束の大域切断のなすベクトル空間の射影化に対応しているということを述べた．大域切断 s とは多様体 X の点 $x \in X$ に複素数 $s(x)$ を滑らかに対応させるある種の関数と思えば良い．大域切断の張るベクトル空間の基底を $s_0, \ldots, s_N$ とすれば，射影空間への有理写像

$$\Phi_D : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N; \quad x \mapsto [s_0(x) : \cdots : s_N(x)]$$

を定める．$s_0(x) = \cdots = s_N(x) = 0$ となる点が線形系の固定点である．これが埋め込みになるとき線形系は非常に豊富 (very ample) であるという．対応する線形系が非常に豊富になる因子のことを非常に**豊富な因子** (very ample divisor) という．因子 D は十分大きな m に対して mD が非常に豊富な因子になるときに，**豊富な因子** (ample divisor) であるという．

豊富な因子があれば，多様体は射影空間への埋め込みをもつ．抽象的に定義された多様体が射影空間への埋め込みをもつかというのは非常に重要な問題である．これが因子の言葉で判定できるのである．

先ほども述べた通り，与えられた因子が豊富かどうかは他の部分多様体との交わりを調べることでわかる．曲線と曲線の交わりを調べたときのような交点数を一般化した交叉形式 $(- \cdot -)$ が定まり，次のことが成り立つ．

定理 102 **（中井の豊富性判定法）**　代数多様体上 X の因子 D が豊富であるための必要十分条件は，任意の点でない部分多様体 $W \subset X$ に対して，

$$(D^{\cdot \dim W} \cdot W) > 0$$

となることである．■

交点形式は線型代数的に扱うことが可能である．代数多様体は連立方程式系から定まる非線形な対象であるが，交点数を介することで線型代数的な研究が可能になる．

$$\begin{tikzcd}
(\text{代数多様体の研究}) & (\text{代数多様体上の因子の研究}) \arrow[l, Longleftarrow] & (\text{交点数の理論などの数値幾何}) \arrow[l, Longleftarrow] \\
 & & (\text{線型代数}) \arrow[u, squiggly]
\end{tikzcd}$$

因子は素因子たちの整係数の形式的線型和であったが，この係数を有理数や実数に拡張したものを $\mathbb{Q}$-因子や $\mathbb{R}$-因子などという．$\mathbb{Q}$-因子の全体や $\mathbb{R}$-因子の全体はベクトル空間をなす．このベクトル空間上に交叉形式を拡張すれば，ある部分多様体 $C \subset X$ との交叉が $(D, C) \geq 0$ を満たす因子 D の全体はベクトル空間の中で錐をなす．また，豊富因子の全体も錐をなしている．ここでは紹介できないが，これらの線型代数的な性質は多様体の性質と深く結びついている．

4　さいごに

代数幾何学は難しいものだと思われ敬遠されがちであるが，実際は古典的な座標幾何，射影幾何の血を引くいたって自然な幾何学である．確かに基礎の修得にはそれなりの苦労と時間を要するかもしれないが，巷で噂されるような難解で抽象的で意味不明なものではない．ここで紹介できたのはほんの一部で，代数幾何学は現在も様々な発展，進化を遂げている．著者はもちろんその全てを知っているわけではないが，著者が出会った

代数幾何学はいずれも魅力的でエキサイティングなものであった．この発表を聞いた人，この原稿を読んだ人の中からも代数幾何学に興味を持ってくれる人が現れるような発表・原稿になっていること，また実際そのような人が現れることを願いつつ筆を置きます．ここまで読んでくださった方はお付き合いありがとうございました．

参考文献

[1] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald, “可換代数入門”, (新妻弘 訳), 共立出版, 2006.
[2] U. Görtz, T. Wedhorn, “Algebraic Geomerty I”, Vieweg+Teubner, 2010.
[3] A. Grothendieck, J. Dieudonné, “Eléments de Géométrie Algébrique I,II,III,IV”, 1960-67.
[4] O. Forster, B. Gilligan, “Lectures on Riemann Surfaces”, GTM 81, Springer-Verlag, 1981.
[5] R. Hartshorne, “Algebraic Geometry”, GTM 52, Springer-Verlag, 1977.
[6] 堀川穎二, “複素代数幾何学入門”, 岩波書店, 1990 (新装版 2015).
[7] 石井志保子, “特異点入門”, 丸善出版.
[8] 桂利行, “代数幾何入門”, 共立講座 21 世紀の数学 17, 共立出版, 1998.
[9] 川又雄二郎, “代数多様体論”, 共立講座 21 世紀の数学 19, 共立出版, 1998.
[10] 川又雄二郎, “高次元代数多様体論”, 岩波数学叢書, 岩波書店, 2014.
[11] 川又雄二郎, “射影空間の幾何学”, 講座「数学の考え方」11, 朝倉書店, 2001.
[12] 小林正典, “代数幾何学入門講義”, SGC ライブラリ 64, サイエンス社.
[13] 松澤淳一, “特異点とルート系”, すうがくの風景 6, 朝倉書店, 2002.
[14] S. Mori, J. Kollár, “Birational Geometry of Algebraic Varieties”, Cambridge Tracts in Mathematics 134, Cambridge Univercity Press, 1998.
[15] S. Mukai, “An Introduction to Invariants and Moduli”, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 81, Cambridge University Press, 2002.
[16] D. Mumford, J. Fogarty, R. Kirwan, “Geometric Invarinat Theory”, Third Enlarged Edition, Ergebnisse der Mathematik und Grenzgebiete 34, Springer-Verlag, 1992.
[17] 永田雅宣, “可換体論”, 裳華房, 1967.
[18] 永田, 宮西, 丸山, “抽象代数幾何学”, 共立出版, 1972.
[19] 小木曽啓示, “代数曲線論”, 講座「数学の考え方」18, 朝倉書店, 2002.
[20] J. P. Serre, “Faisceaux Algebriques Coherents”, 1955.
[21] 上野健爾, “代数幾何”, 岩波講座 現代数学の基礎, 岩波書店, 2008.
[22] H さん, “リーマン面の話”, 都内数学科学生集合会誌「数学のなかま」第 51 号, 197-205, 2011.
[23] N さん, “射影平面のはなし”, 都内数学科学生集合会誌「数学のなかま」第 52 号, 43-54, 2012.
[24] Y さん, “モジュライと安定性”, 都内数学科学生集合会誌「数学のなかま」第 52 号, 211-240, 2012.
[25] K さん, “Poncelet の定理”, 都内数学科学生集合会誌「数学のなかま」第 53 号, 113-123, 2013.
[26] waheyhey, “Bézout の定理”, 都内数学科学生集合会誌「数学のなかま」第 54 号, 43-53, 2014.
[27] C くん, “リーマン面の話”, 都内数学科学生集合会誌「数学のなかま」第 55 号, (ここにページを載せる）, 2015.