Bézout の定理

@waheyhey

2013 年 9 月 8 日

この PDF は 2013 年度の都内数学科学生集合の夏合宿での発表資料に，少しだけ加筆したものです．現代数学の初歩を学びたての一年生でも聴けるように配慮した結果，内容はかなり初等的なのでご勘弁下さい．

本発表では，代数幾何学における古典的結果である Bézout の定理の紹介を通して，代数幾何学のおおまかな雰囲気を知ってもらうことを目的とする．発表時間の都合上，環論の初歩および位相空間についての基本的な知識は仮定し，詳しい説明は省略する．

1　代数多様体

代数幾何とは，現在は多種多様化し複雑化しているきらいがあるが，ざっくり言うと分類などを主な目的とする代数多様体の研究，さらに古典的には多項式系の共通零点の研究である．この節では，その古典代数幾何の本当にはじめの部分の理論を紹介する．

以下，通して k は代数的閉体であるとする．k の標数は 2 でも 3 でもないとする．（代数的閉体を知らない人は複素数体 $\mathbb{C}$ と思ってよい．ここで重要になるのは複素数体 $\mathbb{C}$ の「次数が 1 以上の任意の複素係数一変数多項式には複素根が存在する（代数学の基本定理）」という性質である．）

1.1　アフィン代数多様体

はじめにアフィン代数多様体を定義する．これは可微分多様体においてはユークリッド空間の開部分集合にあたるものであり，代数幾何学は主にこのアフィン代数多様体を貼り合わせてつくられる代数多様体について展開される．

定義 1.1（アフィン代数的集合）　アフィン空間 $\mathbb{A}^n = k^n$ において，有限個の多項式 $f_1, \ldots, f_r \in k[X_1, \ldots, X_n]$ の共通零点の集合を $\mathrm{V}(f_1, \ldots, f_r)$ で表し，アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ のザリスキ閉集合，またはアフィン代数的集合と言う

体上の多項式環については次が成り立つのであった．

定理 1.2（ヒルベルトの基底定理）　体 k 上の多項式環 $k[X_1, \ldots, X_n]$ はネーター環である．

この定理によれば，多項式環 $k[X_1, \ldots, X_n]$ のイデアル $\mathfrak{a}$ について有限個の生成元 $f_1, \ldots, f_r$ が存在して $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_r)$ となる．このとき，$\mathrm{V}(\mathfrak{a}) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n \mid \forall g \in \mathfrak{a}, g(x) = 0\}$ と定義すれば，明らかに $\mathrm{V}(\mathfrak{a}) = \mathrm{V}(f_1, \ldots, f_r)$ がなりたつ．したがって，$k[X_1, \ldots, X_n]$ のイデアル $\mathfrak{a}$ について $\mathrm{V}(\mathfrak{a})$ を考えるのと，$k[X_1, \ldots, X_n]$ の有限個の元 $f_1, \ldots, f_r$ について $\mathrm{V}(f_1, \ldots, f_r)$ を考えるのは同じことである．以下，

$\mathrm{V}(\mathfrak{a})$ の形のものもアフィン代数的集合ということにする．

注意 1.3　環 A がは次の同値な条件をみたすとき，ネーター環というのであった．

(i)　A のイデアルの空でない任意の集合は，極大元を持つ．
(ii)　A のイデアルの任意の昇鎖は停留的である．
(iii)　A の任意のイデアルは有限生成．
(iv)　任意の有限生成 A 加群が有限表示 A 加群．

命題 1.4　アフィン代数的集合については，次が成り立つ．

(i)　$\mathbb{A}^n$ と $\emptyset$ はアフィン代数的集合である．
(ii)　$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を $k[X_1, \ldots, X_n]$ のイデアルとすると，$\mathrm{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathrm{V}(\mathfrak{b}) = \mathrm{V}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathrm{V}(\mathfrak{ab})$
(iii)　$\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$ を $k[X_1, \ldots, X_n]$ のイデアルの族とすると，$\bigcap_{i \in I} \mathrm{V}(\mathfrak{a}_i) = \mathrm{V}\left(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$

証明　(i)　$\mathrm{V}(1) = \emptyset, \mathrm{V}(0) = \mathbb{A}^n$.
(ii)　$\mathfrak{ab} \subset \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ より，$\mathrm{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathrm{V}(\mathfrak{b}) \subset \mathrm{V}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset \mathrm{V}(\mathfrak{ab})$ は成り立つ．ここで，$x \in \mathrm{V}(\mathfrak{ab}), x \notin \mathrm{V}(\mathfrak{a})$ なる元をとると，ある $f \in \mathfrak{a}$ に対して $f(x) \neq 0$．このとき，任意の $g \in \mathfrak{b}$ に対し $fg \in \mathfrak{ab}$ だから $f(x)g(x) = (fg)(x) = 0$ より $g(x) = 0$，すなわち $x \in \mathrm{V}(\mathfrak{b})$.
(iii)　$\bigcap_{i \in I} \mathrm{V}(\mathfrak{a}_i) = \mathrm{V}\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i\right)$ であり，$\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ は $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{a}_i$ で生成されることより従う．■

これにより，アフィン代数的集合は位相空間の閉集合の公理を満たすことが分かった．以下，アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ にはアフィン代数的集合を閉集合とするような位相（ザリスキ位相という）が入っているものとし，アフィン代数的集合というときも，$\mathbb{A}^n$ の部分空間として，この位相を考えることにする．

定義 1.5 **（イデアル）**　アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の部分集合 U に対して，

$$I(U) = \{f \in k[X_1, \ldots, X_n] \mid \forall x \in U, f(x) = 0\}$$

と定義し，U のイデアルという．

命題 1.6　アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の部分集合 U に対して，

$$\mathrm{V}(I(U)) = \overline{U}$$

が成り立つ．

証明　$U \subset \mathrm{V}(I(U))$ は定義より明かだから，$\mathrm{V}(I(U))$ は U を含む閉集合である．一方，$\mathrm{V}(\mathfrak{a})$ を U を含む任意の閉集合とすると，任意の $f \in \mathfrak{a}$ に対して，$x \in U \Rightarrow f(x) = 0$ が成り立つから，$\mathfrak{a} \subset I(U)$．よって $\mathrm{V}(I(U)) \subset \mathrm{V}(\mathfrak{a})$ であるから，$\mathrm{V}(I(U)) = \overline{U}$ ■

次の定理は代数幾何学において重要な定理であるが，証明には可換環論の準備を多く要するので，ここでは成り立つと認めてしまうものとする．証明については代数幾何学の教科書か，可換環論の教科書，たとえば [7] を参照されたい．

定理 1.7 **（ヒルベルトの零点定理）**　$\mathfrak{a}$ を $k[X_1, \ldots, X_n]$ のイデアルとするとき，

$$I(\mathrm{V}(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

が成り立つ．

系 1.8　アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の閉集合（すなわちアフィン代数的集合）と，多項式環 $k[X_1, \ldots, X_n]$ の被約イデアルは 1 対 1 に対応している．
また，アフィン空間の各点からなる 1 点集合（これはアフィン空間の既約閉集合である）は多項式環の極大イデアルと 1 対 1 に対応している．

証明　前半はよい．後半については，$k[X_1, \ldots, X_n]$ の極大イデアルが $\mathfrak{m}_x = (X_1 - x_1, \ldots, X_n - x_n)$ の形に限ることを言えばよい．この $\mathfrak{m}_x$ が極大イデアルになるのは，

$$k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow k, \quad X_i \mapsto x_i$$

の核を考えればよい．逆にある極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在したとして，$\mathrm{V}(\mathfrak{m})$ は空でないから，ある $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して $x \in \mathrm{V}(\mathfrak{m})$ であり，よって $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_x$ で $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ となる．■

注意 1.9　系 1.8 の後半をさしてヒルベルトの弱零点定理ということもある．これより 1 点が閉集合になるから，アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ および，その部分空間は T_1 である．しかし，一般には T_2 空間にはならない．
また，$k = \mathbb{C}$ のとき，アフィン代数的集合すなわちザリスキ閉集合は，$\mathbb{C}^n$ の通常の位相においても閉集合である．なぜならば，多項式 $f \in k[X_1, \ldots, X_n]$ を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}$ への連続写像と見れば，$\mathrm{V}(f)$ は一点 $\{0\} \subset \mathbb{C}$ の f による引き戻しになっているからである．すなわち，$\mathbb{C}^n$ のザリスキ位相は，$\mathbb{C}^n$ の通常の位相より真に弱い．

注意 1.10　系 1.8 より，アフィン代数的集合 V に対して，

$$\Gamma(V) := k[X_1, \ldots, X_n]/I(V)$$

と定義すれば，点集合として，

$$V = \mathrm{Spm}\,(\Gamma(V))$$

が成り立つ．また，$\mathfrak{a}$ を $\Gamma(V)$ のイデアルとして，$\mathrm{V}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}\,(\Gamma(V)) \mid \mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}\}$ を閉集合とするような位相を $\mathrm{Spm}\,(\Gamma(V))$ に入れると（すなわち，アフィンスキーム $\mathrm{Spec}\,(\Gamma(V))$ の部分空間としての位相)，同相

$$V \cong \mathrm{Spm}\,(\Gamma(V))$$

が成り立つ．$\Gamma(V)$ を V のアフィン座標環という．

定義 1.11（既約空間）　空でない位相空間 X は，X と一致しない 2 つの X の閉集合 V_1, V_2 を用いて $X = V_1 \cup V_2$ と表せないとき既約であるという．X の部分集合 M は，M が X の部分空間として既約であるときに，既約であるという．

命題 1.12　アフィン代数的集合 $V \subset \mathbb{A}^n$ が既約であるための必要十分条件は，$I(V)$ が $k[X_1, \ldots, X_n]$ の素イデアルになることである．

証明　アフィン代数的集合 V が既約であるとする．$f, g \in k[X_1, \ldots, X_n]$ に対して，既約性より $V \subset \mathrm{V}(f) \cup \mathrm{V}(g) = \mathrm{V}(fg)$ ならば $V \subset \mathrm{V}(f)$ または $V \subset \mathrm{V}(g)$ であるから，$fg \in I(V)$ ならば $f \in I(V)$ または $g \in I(V)$ が成り立つ．よって $I(V)$ は素イデアルである．

逆に，$I(V)$ が素イデアルであるとする．$I(V)$ が素イデアルであることより，任意の $f,g \in k[X_1,\dots,X_n]$ に対して，$V \subset \mathrm{V}(f) \cup \mathrm{V}(g) = \mathrm{V}(fg)$ ならば $V \subset \mathrm{V}(f)$ または $V \subset \mathrm{V}(g)$ が成り立つ．ここで，$V \subset \mathrm{V}(\mathfrak{a}) \cup \mathrm{V}(\mathfrak{b})$ とすると，$\mathrm{V}(\mathfrak{a}), \mathrm{V}(\mathfrak{b})$ は，$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ のそれぞれの生成元 $(f_1,\dots,f_r),(g_1,\dots,g_l)$ を考えることで $\mathrm{V}(\mathfrak{a}) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{V}(f_i), \mathrm{V}(\mathfrak{b}) = \bigcap_{j=1}^{l} \mathrm{V}(g_j)$ と表せるから，$V \subset \bigcap_{i,j} (\mathrm{V}(f_i) \cup \mathrm{V}(g_j))$ と書ける．よって，各組 (i,j) に対して，$V \subset \mathrm{V}(f_i)$ または $V \subset \mathrm{V}(g_j)$ の少なくとも一方が成り立つ．このとき，全ての i に対し $V \subset \mathrm{V}(f_i)$ となるか，全ての j に対し $V \subset \mathrm{V}(g_j)$ となるかの少なくとも一方が成り立つ（背理法からすぐわかる）から，$V \subset \mathrm{V}(\mathfrak{a})$ または $V \subset \mathrm{V}(\mathfrak{b})$ となり V は既約である． ■

注意 1.13　以上より，アフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の既約閉集合と，多項式環 $k[X_1,\dots,X_n]$ の素イデアルが対応することが分かった．ちなみに，アフィンスキームにおいては極大でない素イデアルも点として見なされるが，これが対応するアフィンスキームの既約閉集合の生成点となっている．アフィンスキーム（より一般にはスキーム）の任意の既約閉集合は生成点を一意に持つ，という定理はこの命題の拡張になっている．

注意 1.14　既約な空間の性質について列挙する．次は同値である．

(i) X は既約.
(ii) X の空でない任意の 2 つの開集合の交わりは空でない.
(iii) X の空でない開集合は稠密.
(iv) X の全体と一致しない閉集合は希薄.
(v) X の空でない任意の開集合が連結.
(vi) X の空でない任意の開集合は既約.

冗長になるので証明は詳しく述べないことにするが，難しくない．

定義 1.15 **（既約成分）**　位相空間 X の既約閉集合全体は，それ自身空でないとき Zorn の補題により極大元を持ち，これを X の既約成分という．（アフィン空間においては，極小素イデアルに対応する閉集合といっても同じことである．）

次にアフィン代数多様体を定義する.

定義 1.16 **（アフィン代数多様体（古典的定義））**　既約なアフィン代数的集合 V を，アフィン代数多様体という．

次に，代数多様体の次元について定義する．

命題 1.17　任意のアフィン代数的集合の減少列

$$V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n \supset \dots$$

は停留的である．

証明　各 V_n に対応するイデアルを考えれば，定理 1.2 より成り立つ． ■

注意 1.18　閉集合についての極小条件を満たす位相空間をネーター空間という．すでにみたようにザリスキ位相を考えたときアフィン空間はネーターである．ネーター空間の部分空間はまたネーターになる．逆に，

ネーター的な部分空間の有限個の和もネーターになる．証明は難しくない．
また一般に，ネータ空間 X は擬コンパクトである．なぜならば $\{U_i\}_{i\in I}$ を X の開被覆とし，$\mathcal{U}$ を U_i たちの有限個の和で表される X の開集合の集合とすれば，条件より $\mathcal{U}$ は極大元 V をもつ．$V=X$ である．なぜなら $V\subsetneq X$ とすると $x\in X\setminus V$ と $x\in U_i$ があって $V\subsetneq V\cup U_i\in\mathcal{U}$ となり極大性に矛盾する．よって X は擬コンパクトになる．
特に，アフィン空間は擬コンパクトになる．逆に，任意の開集合が擬コンパクトな空間はネーター的になる．証明は難しくない．

命題 1.19　任意のアフィン代数的集合 V は，有限個の既約閉集合（すなわちアフィン代数多様体）V_i の和集合 $V=\bigcup_{i=1}^{d}V_i$ の形に表せる．

証明　$\mathcal{U}:=\{$ 空でない V の閉集合で既約閉集合の有限和で書けないもの $\}$ とする．$\mathcal{U}$ が空でないと仮定すれば $\mathcal{U}$ は極小元を持つから，それを V_0 とする．V_0 は既約でないから，V_0 に真に含まれる閉集合 V_1 と V_2 があって $V_0=V_1\cup V_2$ と書ける．しかし，V_0 の $\mathcal{U}$ での極小性より V_1 と V_2 は各々に含まれる既約閉集合の有限和でかけるから，V_0 も有限個の既約閉集合の和で書けることになり，これは矛盾である．■

注意 1.20　ネーター空間 V は高々有限個の既約成分を持つ．なぜなら，$V=\bigcup_{i\in I}V_i$（各 V_i は既約）と表示したとき，既約閉集合 Z について $Z\subset\bigcup V_i$ とすれば，$Z=\bigcup(Z\cap V_i)$ となり，Z の既約性よりある i について $Z\subset V_i$ となる．特に Z として既約成分をとればよい．

定義 1.21**（次元）**　V をアフィン代数多様体とするとき，V のザリスキ閉集合は，それ自身がアフィン代数多様体であるときに V の閉部分多様体であるという．ザリスキ閉部分多様体の真の減少列

$$V=V_0\supsetneq V_1\supsetneq V_1\supsetneq\cdots\supsetneq V_n\neq\emptyset$$

の長さ n の上限を V の次元といい，$\dim V$ で表す．代数的集合の次元については，既約成分たちの次元の上限と定める．

アフィン代数多様体の次元は，注意 1.10 で定義した V のアフィン座標環 $\Gamma(V)$ の Krull 次元に等しい（既約閉集合と素イデアルの対応を考えればよい．）．このように代数多様体の次元については可換環論を用いて議論をすることが多いため，この発表中は，証明が容易な場合を除き，基本的に代数多様体の次元については直感に従い，厳密な議論は避けることにする．

1.2　射影代数多様体

はじめに述べた通り，代数幾何における取り扱いの対象である代数多様体はアフィン代数多様体の貼り合わせとして定義される．その最も基本的な例が射影空間である．n 次元の射影空間は $n+1$ 個のアフィン空間の貼り合わせとして得られる．

定義 1.22**（射影空間）**　$n+1$ 次元アフィン空間（ここでは点集合としてのみ考える）から原点を除いた集合 $\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}$ に次で同値関係を定義する．

$$(a_0,\ldots,a_n)\sim({a_0}',\ldots,{a_n}')\Leftrightarrow\exists\lambda\in k^*,(a_0,\ldots,a_n)=(\lambda{a_0}',\ldots,\lambda{a_n}').$$

このとき，

$$\mathbb{P}^n := \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$

と定義し，この $\mathbb{P}^n$ を n 次元射影空間という．$\mathbb{P}^n$ において $(a_o, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ が属する類を $[a_0 : \cdots : a_n]$ と表す．

定義 1.23 **（射影代数的集合）** m 次の同次多項式 $f \in k[X_0, \ldots, X_n]$ に対して，

$$\mathrm{V}_+(f) := \{[a_0 : \cdots : a_n] \in \mathbb{P}^n \mid f(a_0, \ldots, a_n) = 0\}$$

で定義し，$\mathbb{P}^n$ の射影代数的集合と言う．

注意 1.24　一般に，非同次な多項式 $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ と $a = [a_0 : \cdots : a_n] \in \mathbb{P}^n$ に対して $F(a) = 0$ は well-defined でない．

定義 1.25 **（同次イデアル）** 多項式環 $k[X_0, \ldots, X_n]$ において，有限個の同次多項式で生成されるイデアルを同次イデアルという．

アフィンのときと同じように，同次多項式 $F_1, \ldots, F_r$ で生成するイデアルを $\mathfrak{a}$ とすると，$\mathrm{V}_+(F_1, \ldots, F_r) = \mathrm{V}_+(\mathfrak{a})$ が成り立つ．以下，$\mathrm{V}_+(\mathfrak{a})$ の形のものも射影代数的集合と言うことにする．

定義 1.26 **（射影空間のザリスキ位相）** アフィン空間のときと同様にして，射影代数的集合は閉集合の公理を満たし，射影空間内に位相を定める．この位相を射影空間のザリスキ位相という．また，射影空間 $\mathbb{P}^n$ のザリスキ位相において，開集合は $\mathrm{D}_+(\mathfrak{a}) = \mathbb{P}^n \setminus \mathrm{V}_+(\mathfrak{a})$ の形である．特に $\mathrm{D}_+(f)$ の形のものを，射影空間の基本開集合という．

定義 1.27 **（射影代数多様体）** 既約な射影代数的集合を，射影代数多様体という．

射影空間 $\mathbb{P}^n$ において，基本開集合 $\mathrm{D}(X_i)$ は次の全単射により，$\mathbb{A}^n$ と同一視できる．

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(X_i) &\longrightarrow \mathbb{A}^n \\ [x_0 : \cdots : x_i : \cdots : x_n] &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{\widehat{x_i}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) \end{aligned}$$

この対応が well-defind および全単射であることは明らかである．ここでは詳しい説明を省くが，多項式の同次化，非同次化という操作を考えることにより，この写像が $\mathrm{D}(X_i)$ と $\mathbb{A}^n$ の同相写像を与えていることも分かる．

$$\mathbb{P}^n = \textstyle\bigcup_{i=0}^n \mathrm{D}\,(X_i)$$

であるから，射影空間 $\mathbb{P}^n$ は，$n+1$ 個のアフィン空間 $\mathbb{A}^n$ の貼り合わせとして得られる．（厳密に”貼り合って”いるかの説明は割愛する．）

今みたように，射影空間は局所的にはアフィン空間になるが，射影空間内で大域的な情報をみるには，次のアフィン錐というものを考えるとよい．

定義 1.28 **（アフィン錐）** 射影代数的集合 $V = \mathrm{V}_+(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{P}^n$ に対して，

$$CV = \mathrm{V}(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}^{n+1}$$

と定義し，CV を V に対応するアフィン錐と言う．

補題 1.29　V を射影代数多様体として，V の同次イデアルを，

$$I(V) = \langle\{f \in k[X_0, \ldots, X_n] \mid f \text{ は同次で，} \forall x \in V, f(x) = 0\}\rangle$$

と定義すれば，V が既約であるための必要十分条件は $I(V)$ が素イデアルになることである．

証明　命題 1.12 とほとんど同じである．■

補題 1.30　V を射影代数的集合とする．対応するアフィン錐 CV が既約である必要十分条件は，V が既約であることである．

証明　命題 1.12 と補題 1.29 より従う．

命題 1.31　任意の射影代数的集合の減少列

$$V_0 \supset V_1 \supset \cdots \supset V_n \supset \ldots$$

は停留的である．

証明　各々のアフィン錐をとれば，補題 1.30 と命題 1.17 より成り立つ．■

命題 1.32　任意の射影代数的集合 V は，有限個の既約閉集合（すなわち射影代数多様体）V_i の和集合 $V = \bigcup_{i=1}^{d} V_i$ の形に表せる．

証明　これは命題 1.31 より $\mathbb{P}^n$ がネーター空間であることより従う．■

定義 1.33 **（射影代数的集合の次元）**　V を射影代数多様体とするとき，V のザリスキ閉集合は，それ自身が射影代数多様体であるときに V の閉部分多様体であるという．V のザリスキ閉部分多様体の真の減少列

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_n \neq \emptyset$$

の長さ n の上限を V の次元といい，$\dim V$ で表す．代数的集合の次元については，既約成分たちの次元の上限と定める．

命題 1.34　射影代数多様体 V と，そのアフィン錐 CV について次が成り立つ．

$$\dim CV = \dim V + 1$$

気持ち的には，$\dim V = n$ とし，$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \cdots \supsetneq V_n \neq \emptyset$ を V の既約閉集合の減少列とするとき，CV_n はアフィン空間内で原点を通る直線であるから，列 $CV = CV_0 \supsetneq CV_1 \supsetneq \cdots \supsetneq CV_n \supset \{0\} \neq \emptyset$ を得る．これが極大列になっていればよいのであるが．．．．キチンと示すには，座標環を考える必要があるので，ここでは省略する．

ここまで，アフィンおよび射影空間での代数幾何学を紹介したが，どちらの場合にせよ，代数多様体間の射については一切ふれることができなかった．現代数学においては対象間の射を考えることは非常に基本的かつ

重要であるというのは周知の通りであり，ゆえにここで紹介した理論は代数幾何学の本当のさわりの部分でしかない．別に機会があれば，もう少し踏み入った代数幾何学も紹介したいが，たとえば [5] などは古典代数幾何の基本を詳しく解説した良書であると思うので，代数幾何学に興味のある方はこれらの教科書を読まれることをお勧めする．

1.3 代数曲線

代数曲線に関する言葉をいくつか準備する．

定義 1.35（代数曲線） 1 次元の代数多様体を代数曲線，2 次元の代数多様体を代数曲面という．

定義 1.36（m 次超曲面） $n+1$ 次元射影空間において，m 次の同次式 f で定義される代数的集合 $V_+(f)$ を n 次元 m 次超曲面という．2 つの m 次超曲面 $V_+(f)$ と $V_+(g)$ は，ある $a \in k^*$ に対して $f = ag$ となるときに同一視する．$\mathbb{P}^2$ における 1 次元 m 次超曲面を m 次曲線，$\mathbb{P}^3$ における 2 次元 m 次超曲面を m 次曲面という．

代数曲線の最も基本的な例が次の射影直線である．

定義 1.37（射影直線） $n+1$ 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^{n+1}$ の原点を通る 2 次元線型部分空間 W に対し，定義 1.22 と同じ同値関係で W を類別したもの $\overline{W} = W/\sim$ を $\mathbb{P}^n$ の部分空間とみて射影直線という．

命題 1.38 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の相異なる 2 点 P_1, P_2 に対して，P_1 と P_2 を通る射影直線が一意に定まる．

証明 $p_1, p_2 \in \mathbb{A}^{n+1}$ を P_1, P_2 の代表元とし，W を $\mathbb{A}^{n+1}$ の原点および p_1, p_2 ではられる平面とする．$\overline{W}$ が求める射影直線である．$\overline{W}$ の一意性は W の一意性による． ■

命題 1.39 $\mathbb{P}^2$ における 2 つの相異なる射影直線 L_1, L_2 はただ 1 点の交点を持つ．

証明 $L_1 = \overline{W_1}, L_2 = \overline{W_2}$ とすると，$\mathbb{A}^3$ における平面 W_1 と W_2 の交点は原点を通る直線であるから，$L_1 \cap L_2$ は空ではなく，唯 1 点からなる． ■

アフィン平面においては，相異なる 2 直線は平行になるとき交わりを持たないのであった．しかし，上でみたように射影空間においては相異なる 2 直線は常に唯 1 つの交点を持つ．これを一般の m 次曲線に拡張したのが次の Bézout の定理なのである．

定理 1.40（Bézout の定理） $\mathbb{P}^2$ 上の m 次曲線 C と n 次曲線 D において，C と D が共通の既約成分を持たないとするとき，C と D の共通部分は空ではなく，かつ高々 mn 個の点からなる．

直線の例を考えれば分かるように，Bézout の定理はアフィン平面では成り立たない射影平面特有の定理である．代数幾何学においてアフィン空間は基礎的であり，また有限生成代数との対応などにより非常に扱いやすい面が強いが，Bézout の定理や，「平面上の 2 次曲線は互いに射影変換で移りあう」という事実などは，射影平面における美しい結果であり，代数幾何の話題をアフィンのみに制限せず，それらの貼り合わせである射影空間を考えることの動機づけを与えている．

2　Bézout の定理

この節では Bézout の定理を証明することを目標とする．

2.1　準備

ここまでは古典代数幾何の紹介のためにアフィンおよび射影空間内での理論を展開してきたが，この節では Bézout の定理の定理の証明のためにもう少々の準備をする．
今回は，シンプルに C と D の交点を C と D を定義する同次多項式の共通根として考える．そのため，まずは 2 つの 1 変数多項式

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^m + \cdots + a_m \quad (a_0 \neq 0) \\ g(x) &= b_0x^n + \cdots + b_n \quad (b_0 \neq 0) \end{aligned}$$

がどのようなときに共通根を持つか考える．

定義 2.1（終結式）　上で定義した 2 つの多項式 f, g に対し，$m+n$ 次行列式

$$R(f,g) := \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

を f, g の終結式という．

命題 2.2　多項式 f, g が共通根を持つための必要十分条件は $R(f,g) = 0$ となることである．

証明　$f = a_0\prod_{i=1}^m(x-\alpha_i), g = b_0\prod_{j=1}^n(x-\beta_j)$ とする．各 α_i, β_j を変数と見なし，解と係数の関係を用いて $R(f,g)$ を各 α_i, β_j を変数とする多項式とみなす．

$$R(f,g) = a_0^n b_0^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j)$$

を示せばよい．体係数多項式なので，f と g はモニックであるとしてよい．各 i, j に対し $\alpha_i = \beta_j$ とすると，基本変形を適当にほどこすことにより $R(f,g) = 0$ とわかるので，$R(f,g)$ は $\alpha_i - \beta_j$ で割りきれる．すなわち，，$R(f,g)$ は $\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n(\alpha_i - \beta_j)$ で割りきれる．次数を比較すれば $R(f,g) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n(\alpha_i - \beta_j)$ を得る．■

命題 2.2 は 2 変数同次多項式の場合に容易に拡張される．

系 2.3　2 変数同次多項式

$$\begin{aligned} f(x,y) &= a_0x^m + a_1x^{m-1}y + \cdots + a_my^m \\ g(x,y) &= b_0x^n + b_1x^{n-1}y + \cdots + b_ny^n \end{aligned}$$

についても同じように終結式 $R(f,g)$ が定義され，f と g が $\mathbb{P}^1$ 上で共通零点を持つための必要十分条件は，$R(f,g)=0$ で与えられる．

証明　$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ ならば，

$$\begin{aligned} f(x,y) &= a_0\left(\frac{x}{y}\right)^m + a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{m-1} + \cdots + a_m \\ g(x,y) &= b_0\left(\frac{x}{y}\right)^n + b_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \cdots + b_n \end{aligned}$$

を考えれば命題 2.2 より成り立つ．
$a_0 = 0, b_0 \neq 0$ なら，$R(f,g) = \pm b_0 R(f/y, g)$ より低次の場合に帰着する．
$a_0 = 0, b_0 = 0$ なら，$[x:y] = [1:0]$ が共通零点である．■

2.2　Bézout の定理

それでは最後に Bézout の定理を証明する．

証明（Bézout の定理の証明）　C と D は共通の既約成分を持たないので，交わりは 0 次元の代数的集合，すなわち点となる．よって 命題 1.32 より有限個の点 $\{P_1, \ldots, P_N\}$ からなる．（これは $\emptyset$ かもしれない．）
$P \in \mathbb{P}^2, P \notin C \cup D$ で，どの直線 $P_iP_j (1 \leq i < j \leq N)$ 上にもないものをとる．$P = [1:0:0]$ としてよい[*1]
.
C, D の方程式を，

$$\begin{aligned} f &= f_0 x^m + f_1 x^{m-1} + \cdots + f_m \\ g &= g_0 x^n + g_1 x^{n-1} + \cdots + g_n \end{aligned}$$

（ここで f_i, g_i は y, z に関する i 次同次式）とする．$P \notin C, D$ であるから，$f_0 \neq 0, g_0 \neq 0$.
点 $[c_1 : c_2] \in \mathbb{P}^1$ に対して，P を通る直線 $\mathcal{L}_{[c_1:c_2]}$ が，

$$\mathcal{L}_{[c_1:c_2]} = \{[s : c_1 t : c_2 t] \mid [s:t] \in \mathbb{P}^1\}$$

で与えられる．C および D と $\mathcal{L}_{[c_1:c_2]}$ の交わりは

$$\begin{aligned} f(s, c_1 t, c_2 t) &= 0 \\ g(s, c_1 t, c_2 t) &= 0 \end{aligned}$$

$f_i(c_1, c_2) := a_i, g_i(c_1, c_2) := b_i$ とすると，

$$\begin{aligned} f(s, c_1 t, c_2 t) &= a_0 s^m + a_1 s^{m-1} t + \cdots + a_m t^m \\ f(s, c_1 t, c_2 t) &= b_0 s^n + b_1 s^{n-1} t + \cdots + b_n t^n \end{aligned}$$

であるから，$C \cup D$ の点が $\mathcal{L}_{[c_1:c_2]}$ 上にあるための必要十分条件は終結式について

$$R\left(f(s, c_1 t, c_2 t), g(s, c_1 t, c_2 t)\right) = 0$$

[*1] ここでは厳密には射影変換および，それによって m 次曲線が m 次曲線に移ることなどを確認する必要がある．ここでは省略する．

が成り立つことである．すなわち同次方程式

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \dots & a_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \dots & b_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \dots & b_n \end{vmatrix}=0$$

の零点 $[c_1 : c_2]$ に対応する直線 $\mathcal{L}_{[c_1:c_2]}$ 上に $C \cap D$ の点が存在している．この行列の (i,j) 成分は 0 であるか，$1 \leq i \leq n$ のときは $j-i$ 次，$n+1 \leq i \leq m+n$ のときは $j-i+n$ 次の同次式になるかであり，i と j はそれぞれ 1 から $m+n$ まで動きながら掛け合わされるので，行列式は mn 次の同次式になる．$R(f,g)=0$ は $\mathbb{P}^1$ 上で常に根を持ち，かつ高々 mn 個である．よって $C \cap D$ は空ではなく，かつ高々 mn 個の点よりなる．
■

実は，重複度というものを定義すれば，$\mathbb{P}^2$ 上の m 次曲線と n 次曲線は重複度をこめて丁度 mn 個の交点を持つ．本発表においては発表時間および予備知識を最小限にとどめるという方針から，上のような弱い形での Bézout の定理を紹介したが，より一般的な証明に興味がある方は，[3] の I.7 を参照されたい．また，[3] の V.1 や [5] には環付き空間としての代数多様体および，層係数コホモロジーの理論を用いた Bézout の定理の証明が紹介されている．

参考文献

[1] 川又雄二郎, 射影空間の幾何学, 朝倉書店, 2001.

[2] Grothendieck A, Dieudonné J, Eléments de Géométrie Algébrique I, 1960.

[3] Robin Hartshorne, Aigebraic Geometry, Springer.

[4] Ulrich Gortz, Torsten Wedhorn, Algebraic Geomerty I, Vieweg+Teubner.

[5] 桂利行, 代数幾何入門, 共立出版, 1998.

[6] 小林正典, 代数幾何学入門講義, SGC ライブラリ 64, サイエンス社.

[7] 永田雅宣, 可換体論, 裳華房, 1967.

[8] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald, 可換代数入門, (新妻弘 訳), 共立出版, 2006.

[9] 松村英之, 可換環論, 共立出版, 1980.