de Rham Cohomology Theory

@waheyhey

2013 年 10 月 20 日

しゅそくさん (@eszett66) に微分形式を教えていただいたときのノートを TEX にしました．TEX 化の過程で，@alg_d さん，および同級生の@Ns_math くんと@uta_4414 くんに周辺の幾何学を教えてもらったり，TEX の間違い等を探していただきました．ありがとうございました．

1　外積代数

補題 1.1　V, W を K ベクトル空間（$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$）とする．このとき，$V \otimes W \simeq \mathrm{L}(V^*, W^*; K)$ である．特に，$\bigotimes^k V \simeq \mathrm{L}(V^*, \ldots, V^*; K)$ が成り立つ．

証明　$\iota : V \times W \longrightarrow \mathrm{L}(V^*, W^*; K)$ を，$\iota(v, w) = \langle \cdot, v \rangle_V \langle \cdot, w \rangle_W$ で定める．

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & \mathrm{L}(V^*, W^*; K) \\ V \otimes W \arrow[ur, dotted, "\simeq"] & \end{tikzcd}$$

すると，テンソル積の普遍性より定まる射が同型を与える．■

定義 1.2　S_k の $\bigotimes^k V$ への作用を，

$$(\sigma \cdot \varphi)(v_1, \ldots, v_k) := \varphi(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)})$$

で定める．

定義 1.3（k **次交代テンソル**）

$$\bigwedge^k(V) := \{\varphi \in \bigotimes^k V^* \mid \forall \sigma \in S_k, \sigma\varphi = \mathrm{sgn}\sigma\varphi\}$$

と定める．特に，$\bigwedge^0(V) = k$ とする．$\bigwedge^k(V)$ の元を V の k-form または k 次交代テンソルという．

定義 1.4（**交代化作用素**）　$\mathrm{Alt} : \bigotimes^k V^* \longrightarrow \bigotimes^k V^*$ を，

$$\mathrm{Alt}(\varphi) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma)\sigma\varphi$$

で定める．Alt を交代化作用素という．

命題 1.5　交代化作用素について，次が成り立つ．

(i)　Alt は線型写像である．

(ii)　$\forall\varphi \in \bigotimes^k V^*$ に対し，$\mathrm{Alt}(\varphi) \in \bigwedge^k(V)$.

(iii)　$\forall\varphi \in \bigwedge^k(V)$ に対し，$\mathrm{Alt}(\varphi) = \varphi$.

(iv)　$\forall\varphi \in \bigotimes^k V^*$ に対し，$\mathrm{Alt} \circ \mathrm{Alt}(\varphi) = \mathrm{Alt}(\varphi)$.

証明　明らか．　■

定義 1.6　$\varphi \in \bigotimes^k V^*, \psi \in \bigotimes^l V^*$ に対し，$\varphi \wedge \psi$ を，

$$
\begin{aligned}
\varphi \wedge \psi :=& \frac{(k+l)!}{k!l!}\mathrm{Alt}(\varphi \otimes \psi) \\
=& \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\mathrm{sgn}\sigma)\sigma(\varphi \otimes \psi)
\end{aligned}
$$

と定める．

命題 1.7　次が成り立つ．

(i)　$\wedge$ は bilinear.

(ii)　$\varphi \in \bigotimes^k V^*, \psi \in \bigotimes^l V^*$ のとき，$\varphi \wedge \psi = (-1)^{kl}\psi \wedge \varphi$.

(iii)　$(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta = \varphi \wedge (\psi \wedge \theta)$.

証明　(i)　は Clear.

(ii)

$$
\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & \dots & l & l+1 & \dots & k+l \\ k+1 & \dots & k+l & 1 & \dots & k \end{pmatrix} \in S_{k+l}
$$

とする．$\mathrm{sgn}\sigma_0 = (-1)^{kl}$，$\sigma_0(\varphi \otimes \psi) = \psi \otimes \varphi$ に注意して，

$$
\begin{aligned}
\varphi \wedge \psi &= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}\sigma \cdot \sigma(\varphi \otimes \psi) \\
&= \frac{\mathrm{sgn}\sigma_0}{k!l!}\sum_{\sigma\sigma_0 \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}\sigma \cdot \sigma\sigma_0(\varphi \otimes \psi) \\
&= (-1)^{kl}\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\sigma_0 \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}\sigma \cdot \sigma(\sigma_0(\varphi \otimes \psi)) \\
&= (-1)^{kl}\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\sigma_0 \in S_{k+l}} \mathrm{sgn}\sigma \cdot \sigma(\psi \otimes \varphi) \\
&= (-1)^{kl}\mathrm{Alt}(\psi \otimes \varphi) \\
&= (-1)^{kl}\psi \wedge \varphi
\end{aligned}
$$

■

(iii)　$\varphi \in \bigotimes^k V^*, \psi \in \bigotimes^l V^*, \theta \in \bigotimes^m V^*$ とする．

$$
\begin{aligned}
(\varphi \wedge \psi) \wedge \theta &= \frac{(k+l+m)!}{(k+l)!m!}\mathrm{Alt}\left(\frac{(k+l)!}{k!l!}\left(\mathrm{Alt}(\varphi \otimes \psi) \otimes \theta\right)\right) \\
&= \frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}\mathrm{Alt}\left(\mathrm{Alt}(\varphi \otimes \psi) \otimes \theta\right)
\end{aligned}
$$

一方，

$$\varphi\wedge(\psi\wedge\theta)=\frac{(k+l+m)!}{k!l!m!}\mathrm{Alt}\,(\varphi\otimes\mathrm{Alt}(\psi\otimes\theta))$$

よって，$\mathrm{Alt}\,(\mathrm{Alt}(\varphi\otimes\psi)\otimes\theta)=\mathrm{Alt}\,(\varphi\otimes\mathrm{Alt}(\psi\otimes\theta))$ となればよい．ここで以下の補題を用いる．

補題 1.8　$\lambda\in\bigotimes^p V^*,\mu\in\bigotimes^q V^*$ とする．このとき，$\mathrm{Alt}(\lambda)=0$ ならば，$\mathrm{Alt}(\lambda\otimes\mu)=0$.

証明

$$\begin{pmatrix}1&\dots&p\\ \sigma(1)&\dots&\sigma(p)\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}1&\dots&p&p+1&\dots&p+q\\ \sigma(1)&\dots&\sigma(p)&p+1&\dots&p+q\end{pmatrix}$$

によって定まる単射 $S_p\hookrightarrow S_{p+q}$ により，$G:=S_p$ を S_{p+q} の部分群として考える．
$\sigma,\tau\in S_{p+q}$ に対し，$\sigma\sim\tau\Leftrightarrow\sigma^{-1}\tau\in G$ と定め，S_{p+q} を同値関係 $\sim$ の剰余類で分解する．

$$S_{p+q}=G_1\sqcup\cdots\sqcup G_r$$

$\sigma\in G=S_p$ に対し，$\sigma(\lambda\otimes\mu)=\sigma(\lambda)\otimes\mu$ に注意すると，

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in G}\mathrm{sgn}\sigma\cdot\sigma(\lambda\otimes\mu)&=\sum_{\sigma\in G}\mathrm{sgn}\sigma\cdot\sigma(\lambda)\otimes\mu\\&=\left(\sum_{\sigma\in G}\mathrm{sgn}\sigma\cdot\sigma(\lambda)\right)\otimes\mu\\&=p!\mathrm{Alt}(\lambda)\otimes\mu\\&=0\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}p!q!\mathrm{Alt}(\lambda\otimes\mu)&=\sum_{\sigma\in S_{p+q}}\mathrm{sgn}\sigma\cdot\sigma(\lambda\otimes\mu)\\&=\sum_{a=1}^{r}\sum_{\sigma\in G_a}\mathrm{sgn}\sigma\cdot\sigma(\lambda\otimes\mu)\end{aligned}$$

$$\sum_{\sigma\in G_a}\mathrm{sgn}\sigma\cdot\sigma(\lambda\otimes\mu)=\mathrm{sgn}\sigma_a\sum_{\sigma\in G}\mathrm{sgn}\sigma\cdot\sigma(\lambda\otimes\mu)=0$$

■

証明（(iii) の続き）　$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\varphi\otimes\psi)-\varphi\otimes\psi)$ である．補題より，$\mathrm{Alt}((\mathrm{Alt}(\varphi\otimes\psi)-\varphi\otimes\psi)\otimes\theta)=0$ であるから，$\mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(\varphi\otimes\psi)\otimes\theta)=\mathrm{Alt}((\varphi\otimes\psi)\otimes\theta)=\mathrm{Alt}(\varphi\otimes\psi\otimes\theta)$ となる．同様に，$\mathrm{Alt}\,(\varphi\otimes\mathrm{Alt}(\psi\otimes\theta))=\mathrm{Alt}(\varphi\otimes\psi\otimes\theta)$ である．■

系 1.9　$\varphi_i\in\bigwedge^{k_i}(V)(i=1,\dots,r)$ に対して，

$$\varphi_1\wedge\cdots\wedge\varphi_r=\frac{(k_1+\cdots+k_r)!}{k_1!\cdots k_r!}\mathrm{Alt}(\varphi_1\otimes\cdots\otimes\varphi_r)$$

系 1.10　$\theta_i\in\bigwedge^1(V)=V^*,(i=1,\dots r),\sigma\in S_r$ に対して，

$$\theta_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\theta_{\sigma(r)}=\mathrm{sgn}\sigma\cdot\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_r$$

命題 1.11　$\{e_i\}_{i=1}^n$ を V の基底とし，$\{e^i\}_{i=1}^n$ を双対基底とする．このとき，

$$\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n\}$$

は $\bigwedge^k V$ の基底．特に，

$$\dim \bigwedge^k V = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} & (k \le n) \\ 0 & (k > n) \end{cases}$$

定義 1.12　V, W を K 線形空間，$f : V \longrightarrow W$ を線型写像とする．このとき，$\bigwedge^k f = f^* : \bigwedge^k W \longrightarrow \bigwedge^k V$ を，$f^*\varphi(v_1, \ldots, v_k) := \varphi(f(v_1), \ldots, f(v_k)), (\varphi \in \bigwedge^k V, v_1, \ldots, v_k \in V)$ で定める．特に，$\bigwedge^0 f = \mathrm{id}_k$ とする．

2　微分形式

M は C^∞ 級可微分多様体とする．

定義 2.1（k 次微分形式）　$\alpha : M \ni x \longmapsto \alpha_x \in \bigwedge^k T_x^* M$ なる対応で，任意の chart $(U, x^1, \ldots, x^n)$ に対して，

$$\alpha_q = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 \ldots i_k}(q)(dx^{i_1})_q \wedge \cdots \wedge (dx^{i_k})_q$$

であり，各係数について，

$$U \ni q \longmapsto \alpha_{i_1 \ldots i_k}(q) \in \mathbb{R}$$

が C^∞ である α を，k 次微分形式（k-form）という．

例 2.2　$f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ とすると，$df : M \ni x \longmapsto (df)_x \in T_x^* M$ は 1-form になる．
なぜなら，chart$(U, x^1, \ldots, x^n)$ に対し，任意の $q \in U$ について，

$$(df)_q \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_q \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(q)$$

なので，

$$(df)_q = \frac{\partial f}{\partial x^i}(q)(dx^i)_q, \qquad \frac{\partial f}{\partial x^i}(q) \in C^\infty(U)$$

である．

注意 2.3　k-form α は，$\mathfrak{X}(M)$ を M 上のベクトル場全体として，

$$\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

なる $C^\infty(M)$-線型写像で，交代的であるものとみなしてよい．

$$\begin{tikzcd} \bigwedge^k V \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, equal] & \bigwedge^k T^* M \arrow[d, equal] \\ L(V, \ldots, V; K) \text{ で交代的なもの} \arrow[r, leftrightarrow] & [\text{ここにあたるもの}] \end{tikzcd}$$

定義 2.4（微分形式の引き戻し） M, N を C^∞ 級多様体とし，$F : M \longrightarrow N$ を C^∞ 級写像とする．このとき，$F^*\alpha$ を各点 $x \in M$ に対し，

$$(F^*\alpha)_x := (F_{*x})^*\alpha_{F(x)}$$

で定める．

定義 2.5 M, N を C^∞ 級多様体とし, $F : M \longrightarrow N$ を C^∞ 級写像, $x \in M$ とする．$F_{*x} : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N$, $f \in C^\infty$ と $v_x \in T_xM$ について,

$$(F_{*x})(v_x)f := v_x(F^*f)$$

と定める．

注意 2.6 $\alpha = \sum_{\lambda_1 < \cdots < \lambda_k} \alpha_{\lambda_1 \cdots \lambda_k} dy^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dy^{\lambda_k}$ と書いておく．

$$\begin{aligned}
(F^*\alpha)_{i_1 \ldots i_k} &= (F^*\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) \\
&= \alpha\left(F_{*x}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right), \ldots, F_{*x}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right)\right) \\
&= \alpha\left(\frac{\partial F^{\lambda_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot \frac{\partial}{\partial y^{\lambda_1}}, \cdots, \frac{\partial F^{\lambda_k}}{\partial x^{i_k}} \cdot \frac{\partial}{\partial y^{\lambda_k}}\right) \\
&= \frac{\partial F^{\lambda_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot \cdots \cdot \frac{\partial F^{\lambda_k}}{\partial x^{i_k}} \alpha_{F(x)}\left(\frac{\partial}{\partial y^{\lambda_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{\lambda_k}}\right) \\
&= \frac{\partial F^{\lambda_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot \cdots \cdot \frac{\partial F^{\lambda_k}}{\partial x^{i_k}} \alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(F(x))
\end{aligned}$$

であり,

$$\frac{\partial F^{\lambda_1}}{\partial x^{i_1}} \cdot \cdots \cdot \frac{\partial F^{\lambda_k}}{\partial x^{i_k}} \alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(F(x))$$

は x について C^∞ 級である．

命題 2.7 次が成り立つ．

(i) $f \in C^\infty$ に対し，$F^*df = d(F^*f)$

(ii) $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$

証明

$$\begin{aligned}
(F^*df)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) &= df\left(F_*\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\
&= df\left(\frac{\partial F^\lambda}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial y^\lambda}\right) \\
&= \frac{\partial F^\lambda}{\partial x^i} \cdot df\left(\frac{\partial}{\partial y^\lambda}\right) \\
&= \frac{\partial F^\lambda}{\partial x^i}(x)\frac{\partial f}{\partial y^\lambda} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ F) = \frac{\partial}{\partial x^i}(F^*f) = (dF^*f)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)
\end{aligned}$$

■

定義 2.8（外微分作用素） 写像 $d : \mathcal{A}^*(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{*+1}(M)$ は以下の条件を満たすとき，外微分作用素であるという．

(i) $\mathbb{R}$-線型写像である．

(ii) $\alpha \in \mathcal{A}^k(M), \beta \in \mathcal{A}^l(M)$ に対し，

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{kl} \alpha \wedge d\beta \qquad \text{（反微分）}$$

(iii) $d^2 = 0$

(iv) $f \in C^\infty(M)$，$X \in \mathfrak{X}(M)$ に対し，$df(X) = Xf$

定理 2.9 外微分作用素 d は唯一つ存在する．

証明　（存在）

$\alpha \in \mathcal{A}^k(M)$ に対し，$(U, x^1, \ldots, x^n)$ を一つの chart として，

$$\alpha_{|U} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \alpha_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

（ここで各 $\alpha_{i_1 \ldots i_k}$ は 0-form とみている．）

ここで外微分作用素 d を

$$\begin{aligned} d\alpha &:= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} d\alpha_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \left(\sum_{\lambda=1}^{k+1} (-1)^{\lambda - 1} \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots i_k}}{\partial x^{i_\lambda}} \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

で定める．条件 (i) と (ii) と (iv) を満たすことはよい．(iii) については，$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{aligned} ddf &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^j \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) dx^j \wedge dx^i = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

であり，各

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} = 0$$

より，$ddf = 0$ であるから，(iii) が満たされていると分かる．

（一意性）

d が条件の (i) から (iv) を満たすとする．d が局所作用素であることを示す．すなわち，任意の $\alpha \in \mathcal{A}^k$ に対し，

$$\mathrm{supp}(d\alpha) \subset \mathrm{supp}\alpha := \overline{\{x \in M \mid \alpha_x \neq 0\}}$$

を示す．

$x \in (\mathrm{supp}\alpha)^{\mathrm{c}}$ をとる．$\mathrm{supp}\alpha$ は閉集合より，x の開近傍 U があって，$\alpha_{|U} \equiv 0$．このとき，$d\alpha_{|U} \equiv 0$ を示せ

ば良い．$y \in U$ を任意にとる．また，$f \in C^\infty(M)$ で $\mathrm{supp} f \subset U$ かつ $f(y)=1$ なるものをとる．このとき，M 上で $f\alpha \equiv 0$ であるから，

$$0 = d(f\alpha)_y = (df)_y \wedge \alpha_y + f(y) \wedge (d\alpha)_y = (d\alpha)_y$$

である．よって，U 上で $d\alpha \equiv 0$ となる． ■

命題 2.10　$F : M \longrightarrow N$ を C^∞ 級写像とする．このとき，外微分作用素 d に対して，

$$F^* d = dF^*$$

が成り立つ．

注意 2.11

$$d\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

を，

$$\begin{aligned} d\alpha(X_1, \ldots, X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i f \alpha(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{k+1}) \\ &+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{k+1}) \end{aligned}$$

とすると，各成分は，

$$\begin{aligned} (d\alpha)_{i_1 \ldots i_{k+1}} &= \sum_{\lambda=1}^{k+1} (-1)^{\lambda-1} \frac{\partial}{\partial x^{i_{lambda}}} \alpha \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_\lambda}}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_{k+1}}} \right) \\ &= \sum_{\lambda=1} k+1 (-1)^{\lambda-1} \frac{\partial \alpha_{i_1 \ldots \widehat{i_\lambda} \ldots i_{k+1}}}{\partial x^{i_\lambda}} \end{aligned}$$

で，先に定義した $d\alpha$ の成分と一致する．

3　de Rham コホモロジー群

定義 3.1 **(de Rham 複体，de Rham コホモロジー群)**　M を C^∞ 級多様体とする．

$$0 \longrightarrow C^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{A}^1(M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{A}^n(M) \longrightarrow 0$$

を M の de Rham 複体といい，このコホモロジー群を M の de Rham コホモロジーといい，$\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(M)$ で表す．

注意 3.2　$\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}} := \bigoplus_{k=0}^n \mathrm{H}^k_{\mathrm{DR}}(M)$ は非可換環の構造を持つ．

定義 3.3　M, N を C^∞ 級多様体，$F : M \longrightarrow N$ を C^∞ 級写像とする．このとき，コホモロジー間の写像 $F^* : \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(N) \longrightarrow \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(M)$ を，$[\alpha] \in \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(N)$ に対し，$F^*([\alpha]) := [F^*\alpha]$ で定める．

注意 3.4　$\alpha, \beta \in \mathrm{Ker}(d^k : \mathcal{A}^k(M) \longrightarrow \mathcal{A}^{k+1}(M))$ に対し，$[\alpha] = [\beta] \in \mathrm{H}^k_{\mathrm{DR}}(M)$ とすると，ある $\gamma \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ が存在して，$\alpha - \beta = d^{k-1}\gamma$ となるから，$F^*\alpha = F^*(\beta + d\gamma) = F^*\beta + F^*d\gamma = F^*\beta + dF^*\gamma$ より，上の定義の写像 F^* は well-defined になる．

命題 3.5　次が成り立つ．

(i) $\mathrm{id}_M^* = \mathrm{id}_{\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(M)}$

(ii) M, N, L を C^∞ 級多様体，$F : M \longrightarrow N$ と $G : N \longrightarrow L$ をそれぞれ C^∞ 級写像とすると，$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$

系 3.6　$M \cong_{\text{diffeo}} N \Rightarrow \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(M) \cong \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(N)$

命題 3.7　$M = \coprod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ を，M の連結成分への分解とする．このとき，

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{H}^0_{\mathrm{DR}}(M) = |\Lambda|$$

証明　M が連結として証明する．$f \in C^\infty$ が $df = 0$ を満たすとする．$x \in M$ を任意にとり，x を中心とする M の $\mathrm{chart}(U, x^1, \ldots, x^n)$ で $U \simeq \mathrm{B}(0,1)$ なるものをとる．平均値の定理から，任意の $y \in U$ に対して，ある θ があって，

$$f(y) = f(0) + \frac{\partial f}{\partial x^i}(\theta y) y^i = f(0)$$

より，f は U 上 constant である．■

定義 3.8　M, N を C^∞ 級多様体，$F_0, F_1 : M \to N$ を C^∞ 級写像とする．このとき，C^∞ 級写像 $H : \mathbb{R} \times M \longrightarrow N$ で，$H(0, \cdot) = F_0$ かつ $H(1, \cdot) = F_1$ となるものが存在するとき，F_0 と F_1 はホモトピックであるといい，$F_0 \simeq_{C^\infty} F_1$ と書く．

定義 3.9　M, N を C^∞ 級多様体とする．C^∞ 級写像 $F : M \to N$ と $G : M \to N$ が存在して，$G \circ F \simeq_{C^\infty} \mathrm{id}_M$ かつ $F \circ G \simeq_{C^\infty} \mathrm{id}_N$ となるとき，M と N はホモトピックであるという．

定義 3.10（**プリズム作用素**）　写像 $P : \mathcal{A}^{k+1}(\mathbb{R} \times M) \to \mathcal{A}^k(M)$ を，$\alpha \in \mathcal{A}^{k+1}(\mathbb{R} \times M)$ と $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ に対して，

$$(P\alpha)(X_1, \ldots, X_k) := \int_0^1 \alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}, X_1, \ldots, X_k\right) dt$$

で定義する．この P をプリズム作用素という．

注意 3.11

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_{k+1}} f_{i_1 \ldots i_{k+1}}(t, x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{k+1}} + \sum_{\lambda_1 < \cdots < \lambda_{k+1}} g_{\lambda_1 \ldots \lambda_{k+1}}(t, x) dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_{k+1}}$$

に対し，

$$P\alpha = \sum_{\lambda_1 < \cdots < \lambda_k} \left(\int_0^1 g_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(t, x) dx\right) dx^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\lambda_k}$$

である．

命題 3.12　プリズム作用素について，

$$dP + Pd = j_1^* - j_0^*$$

が成り立つ．ここで，j_t は，埋め込み $j_t := M \hookrightarrow \{t\} \times M \subset \mathbb{R} \times M$ である．

証明　$\alpha \in \mathcal{A}(\mathbb{R}\times M)$，$X_1,\ldots,X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ に対し，

$$
\begin{aligned}
(dP\alpha)(X_1,\ldots,X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}X_i(P\alpha)(X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_{k+1}) \\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}(P\alpha)([X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_{k+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i-1}X_i\int_0^1 \alpha\left(\frac{\partial}{\partial t},X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_{k+1}\right)dt \\
&\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\int_0^1 \alpha\left(\frac{\partial}{\partial t},[X_i,X_j],X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_{k+1}\right)dt \\
(Pd\alpha)(X_1,\ldots,X_{k+1}) &= \int_0^1 (d\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t},X_1,\ldots,X_{k+1}\right)dt \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(X_1,\ldots,X_{k+1}\right)dt + \int_0^1\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^iX_i\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t},X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,X_{k+1}\right)dt \\
&\quad + \int_0^1\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha\left([X_i,X_j],\frac{\partial}{\partial t},X_1,\ldots,\widehat{X_i},\ldots,\widehat{X_j},\ldots,X_{k+1}\right)dt
\end{aligned}
$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
(dP+Pd)\alpha(X_1,\ldots,X_{k+1}) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(X_1,\ldots,X_{k+1}\right)dt \\
&= \big[\alpha(X_1,\ldots,X_{k+1})\big]_{t=0}^{t=1} \\
&= (j_1^*\alpha)(X_1,\ldots,X_{k+1}) - (j_0^*\alpha)(X_1,\ldots,X_{k+1})
\end{aligned}
$$

■

系 3.13　$F_0 \simeq_{C^\infty} F_1 : M \longrightarrow N$ ならば，$F_0^* = F_1^*$.

証明　$F_0 \simeq_{C^\infty} F_1$ より，$H : \mathbb{R}\times M \longrightarrow N$ が存在して，$H(0,-) = F_0$ かつ $H(1,-) = F_1$，すなわち $H\circ j_0 = F_0$ かつ $H\circ j_1 = F_1$ となる．よって，α : cycle に対して，

$$
\begin{aligned}
F_1^*\alpha - F_2^*\alpha &= j_1^*H^*\alpha - j_2^*H^*\alpha \\
&= (j_0^* - j_1^*)H^*\alpha \\
&= (dP+Pd)H^*\alpha \\
&= d(PH^*\alpha) + PdH^*\alpha = d(PH^*\alpha) + PH^*d\alpha = d(PH^*\alpha)
\end{aligned}
$$

より，示された. ■

系 3.14　$M \simeq_{C^\infty} N$ ならば，$\mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(M) \simeq \mathrm{H}^*_{\mathrm{DR}}(N)$

系 3.15（Poincaré の補題）　M を可縮な C^∞ 級多様体とする．このとき，

$$
\mathrm{H}^q_{\mathrm{DR}}(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & (q=0) \\ 0 & (q>0) \end{cases}
$$

命題 3.16　U, V を M の open covering とするとき，

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "j_1"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i_1"] \arrow[dr, "i_2"'] \arrow[rr, "i_0"'] & & M \\ & V \arrow[ur, "j_2"'] & \end{tikzcd}$$

各包含写像に上のように名前を付けると，

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}^*(M) \xrightarrow[j_1^* \oplus j_2^*]{} \mathcal{A}^*(U) \oplus \mathcal{A}^*(V) \xrightarrow[i_1^* - i_2^*]{} \mathcal{A}^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

は完全列になる．

証明　(i)　$\alpha \in \mathrm{Ker}(j_1^* \oplus j_2^*)$ をとる．このとき，$j_1^*\alpha = 0$ かつ $j_2^*\alpha = 0$ であるから，$\alpha_{|U} \equiv 0$ かつ $\alpha_{|V} \equiv 0$. よって $\alpha \equiv 0$ である．

(ii)　$(\alpha, \beta) \in \mathrm{Im}(j_1^* \oplus j_2^*)$ とすると，ある $\gamma \in \mathcal{A}^*(M)$ が存在して，$\alpha = j_1^*\gamma$，$\beta = j_2^*\gamma$ となる．このとき，$(i_1^* - i_2^*)\alpha = i_1^* j_1^* \alpha - i_2^* j_2^* \alpha = i_0^*\alpha - i_0^*\alpha = 0$．よって，$\mathrm{Im}(j_1^* \oplus j_2^*) \subset \mathrm{Ker}(i_1^* - i_2^*)$.

(iii)　$\alpha, \beta) \in \mathrm{Ker}(i_1^* - i_2^*)$ に対して，$i_1^*\alpha = i_2^*\beta$ であるから．$\alpha_{|U\cap V} = \beta_{|U\cap V}$ である．よって，ある $\gamma \in \mathcal{A}^*(M)$ があって，

$$\gamma = \begin{cases} \alpha & \text{(on U)} \\ \beta & \text{(on V)} \end{cases}$$

よって，$\mathrm{Ker}(i_1^* - i_2^*) \subset \mathrm{Im}(j_1^* \oplus j_2^*)$

(iv)　$\{\rho_1, \rho_2\}$ を $\{U, V\}$ に従属する 1 の分割とする．任意の $\alpha \in \mathcal{A}(U \cap V)$ に対して，$-\rho_1\alpha \in \mathcal{A}(V)$，$\rho_2\alpha \in \mathcal{A}(U)$ であり，

$$(i_1^* - i_2^*)(\rho_2\alpha, -\rho_1\alpha) = i_1^*\rho_2\alpha + i_2^*\rho_1\alpha = (\rho_1 + \rho_2)\alpha = \alpha$$

より，$(i_1^* - i_2^*)$ は全射である．　■

参考文献

[1] R. Bott, L.W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Springer.

[2] 北原晴夫, 河上肇, 調和積分論, 近代科学社, 1991.

[3] 松島与三, 多様体入門, 裳華房, 1965.

[4] 服部晶夫, 多様体 増補版, 岩波書店, 1989.

[5] 坪井俊, 幾何学 III 微分形式, 東京大学出版会, 2008.